

设备更新分析中动、静态关系一致性研究

陈守伦¹, 钱 敏², 胡晓龙¹

(1. 河海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098; 2. 淮河水利委员会, 安徽 蚌埠 233001)

摘要 根据设备残值和年运行费变化所作的合理假设, 提出四个动态、静态更新模型并获得相应的解, 进而对这些模型和解的统一性问题作了理论上的探讨, 证明静态模型及其解是动态情况的一种特例, 为研究更复杂的更新问题奠定了理论基础.

关键词 设备更新 静态模型 动态模型 最佳更新年限 残值 平均年运行费用

中图分类号 :TB4 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2001)01-0025-05

1 问题的提出

在工业化社会中, 大型设备的更新问题是业主十分关心的. 由于技术的进步而不断有更先进的设备出现, 这些技术先进的设备效率高, 运行、维修费用低, 当然购置和安装费用也高, 业主面临的选择是淘汰目前正在运行的设备, 购置技术先进的设备, 还是继续维持目前的设备运行下去呢? 如果经过分析, 打算维持已有设备继续运行下去, 又面临着一个新问题: 这台设备究竟运行到何时再考虑更新呢? 对于第一个问题的回答完全依赖于对第二个问题的回答. 本文将对第二个问题进行深入的探讨, 尤其对考虑时间价值的动态模型和不考虑时间价值的静态模型进行一致性研究, 从理论上证明静态模型的解只是动态模型解的一部分. 至于第一个问题将在另文中详细探讨.

2 基本假设

2.1 效益不变假设^[1,3]

一台长期运行的设备, 其效率会因机械磨损而逐渐降低, 因而其效益也会随之降低, 运行、维修费用会逐渐升高, 其效益变化如图 1 所示. 为了分析方便, 常假设该设备效益维持不变, 将假设的补充效益(B)用假设的运行、管理、维修费的增量(C)来平衡, 即将图 1 等价地变换为图 2. 令 $B_1 + \Delta B_1 = B_2 + \Delta B_2 = B_3 + \Delta B_3 = B_4 + \Delta B_4$, 且令 $\Delta B_1 = \Delta C_1, \Delta B_2 = \Delta C_2, \Delta B_3 = \Delta C_3, \Delta B_4 = \Delta C_4, \dots$



图 1 某设备效益变化示意图

Fig.1 Benefit variation of equipment

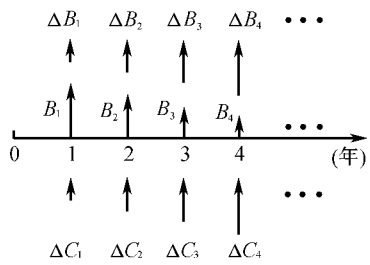


图 2 某设备效益不变等价图

Fig.2 Equivalent diagram of unchangeable benefit

2.2 年运行费 A_j 线性增加、残值 L 不变假设

如前所述, 设备在运行中逐渐老化, 零部件磨损加剧导致年运行费呈线性递增 (也包含图 2 中的 ΔC), 其流程图如图 3 所示, 若用数学式可表示为

$$A_j = A_0 + (j - 1)\Delta A \qquad j = 1, 2, \dots, n, \dots \qquad (1)$$

$$L_j = L = \text{常数} \quad (2)$$

式中 ΔA 为运行费每年增加值.

2.3 年运行费 A_j 线性增加、残值 L 线性下降假设

年运行费数学表示仍如式(1), 残值数学表示为

$$L_j = L_0 - (j - 1)\Delta L \quad j = 1, 2, \dots, n, \dots \quad (3)$$

式中 ΔL 为残值每年减少量.

2.4 设备更新标准流程图

为分析方便, 将设备更新标准流程绘制成图4. 图中 P_0 代表该设备在分析基准年的市场价值, 其余符号意义同前.

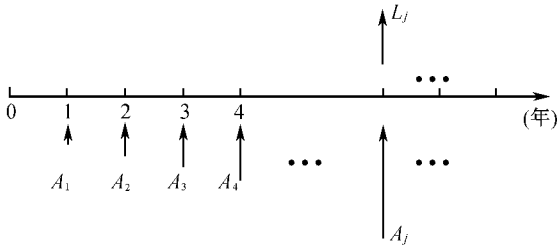


图3 某设备年运行费、残值示意图

Fig.3 Annual operation cost and salvage

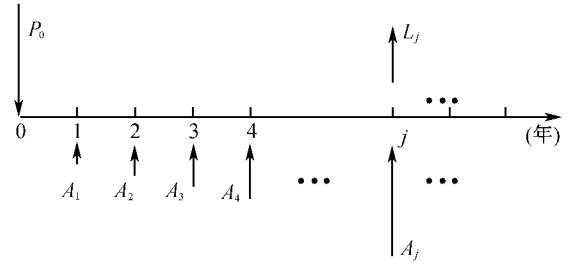


图4 设备更新分析标准流程

Fig.4 Standard cash flow of equipment replacement

3 更新分析模型及其解的一致性证明(I) [2]

3.1 残值 L 为常数、年运行费 A_j 呈线性增加的静态模型及其解

当 $L = \text{常数}$,

$$A_j = A_0 + (j - 1)\Delta A \quad (4)$$

对图4所示流程, 不考虑资金时间价值, 求 n 年平均年运行费用 $\bar{A}$ 时, 其模型如下:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} (p_0 - L + \sum_{j=1}^n A_j) \quad (5)$$

将式(4)代入式(5)中, 并整理, 则有

$$\bar{A} = \frac{1}{n} (p_0 - L) + \frac{1}{2} (n - 1)\Delta A + A_0 \quad (6)$$

为求得使 $\bar{A}$ 最小的最佳更新年限, 按求极值法则, 对式(6)求导, 即 $\frac{d\bar{A}}{dn} = 0$, 则有

$$\frac{d\bar{A}}{dn} = (-1) \frac{1}{n^2} (p_0 - L) + \frac{1}{2} \Delta A = 0$$

解出

$$n = \sqrt{\frac{2(P_0 - L)}{\Delta A}} \quad (7)$$

此 n 值即为所求的设备最佳更新年限(静态值).

3.2 残值 L 为常数、年运行费 A_j 呈线性增加的动态模型及其解

当 L 为常数时, 由式(4), 对图4所示的流程考虑资金时间价值, 求 n 年平均年运行费用 $\bar{A}$ 的模型如下:

$$\bar{A} = [P_0 - L(P/F, i, n) + A_0(P/A, i, n) + \Delta A(P/G, i, n)](A/P, i, n) \quad (8)$$

式中 i —— 动态折算年折算利率, % 其它参数意义同前. 将复利公式

$$(P/F, i, n) = (1 + i)^{-n} \quad (P/A, i, n) = \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$$

$$(P/G, i, n) = \frac{(1 + i)^n - 1 - ni}{i^2(1 + i)^n} \quad (A/P, i, n) = \frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}$$

代入到式(8)中, 整理得

$$\bar{A} = Li + A_0 + (P_0 - L) \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} + \Delta A \frac{(1+i)^n - 1 - ni}{i(1+i)^n - i} \quad (9)$$

为求使 $\bar{A}$ 达最小值,按求极值法则,对式(9)求导,则有

$$\frac{d\bar{A}}{dn} = (P_0 - L) \frac{d}{dn} \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] + \Delta A \frac{d}{dn} \left[\frac{(1+i)^n - 1 - ni}{i(1+i)^n - i} \right] \quad (10)$$

令 $\frac{d\bar{A}}{dn} = 0$, 经过推演, 式(10)变为

$$\frac{1}{(1+i)^n} + n \ln(1+i) = 1 + \frac{P_0 - L}{\Delta A} i \ln(1+i) \quad (11)$$

当折算利率 i 及 $P_0, L, \Delta A$ 均已知时, n 可通过试算求出, 此 n 值即为设备的最佳更新年限(动态)。

3.3 动、静态解的一致性证明^[1]

由以上分析可见, 式(7)代表不考虑资金时间价值静态模型的解, 式(11)代表考虑资金时间价值动态模型的解. 按经济分析基本原理, 当折算利率(i)趋近于零时, 动态问题就变为静态问题. 如果上述两模型及其求解过程正确, 则应该能证明在 $i \rightarrow 0$ 时, 式(11)将变为式(7) (至于动态模型(8)或(9), 在 $i \rightarrow 0$ 时, 变为静态模型(6), 其证明比较简单, 此处省略), 现证明如下:

将式(11)加以变换, 成为

$$\frac{\frac{1}{(1+i)^n} + n \ln(1+i) - 1}{i \ln(1+i)} = \frac{P_0 - L}{\Delta A} \quad (12)$$

当 $i \rightarrow 0$, 两边取极限, 式(12)左边成为

$$\lim_{i \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1 + n \ln(1+i)}{i \ln(1+i)} \quad \left(\rightarrow \frac{0}{0}, \text{不定式} \right)$$

运用罗比塔法则, 对分子分母分别求导, 取极限, 再求导, 取极限, 则有

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \lim_{i \rightarrow 0} \frac{-n(1+i)^{-n-1} + n/(1+i)}{\ln(1+i) + i/(1+i)} = \lim_{i \rightarrow 0} \frac{n(n+1)(1+i)^{-n-2} - n/(1+i)^2}{1/(1+i) + 1/(1+i)^2} = \\ &= \lim_{i \rightarrow 0} \frac{n(n+1) - n(1+i)^n}{(1+i)^{n+1} + (1+i)^n} = \frac{n^2 + n - n}{1+1} = \frac{n^2}{2} \end{aligned}$$

而右边 = $\frac{P_0 - L}{\Delta A}$, 左边 = 右边, 即 $\frac{n^2}{2} = \frac{P_0 - L}{\Delta A}$, 则

$$n = \sqrt{\frac{2(P_0 - L)}{\Delta A}}$$

此结果正是静态模型的解, 即式(7). 一致性证毕.

4 更新分析模型及其解的一致性证明(II)^[2]

4.1 残值 L 呈线性递减, 年运行费 A_j 呈线性增加的静态模型及其解

设: $L_j = L_0 - (j-1)\Delta L$ (13)

$$A_j = A_0 + (j-1)\Delta A \quad (14)$$

模型流程图仍如图 4 所示, 仅图中之 L_j 为变量. 不考虑资金时间价值, 求 n 年平均年运行费用 $\bar{A}$ 时, 其模型如下:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \left(P_0 - L_j + \sum_{j=1}^n A_j \right) \quad (15)$$

将式(13)、式(14)代入式(15)中, 整理得

$$\bar{A} = \frac{1}{n} (P_0 - L_0) + \frac{1}{n} (n-1)\Delta L + A_0 + \frac{1}{2} (n-1)\Delta A \quad (16)$$

为求使 $\bar{A}$ 达到最小的最佳更新年限, 对式(16)求导, 且令 $\frac{d\bar{A}}{dn} = 0$, 则有

$$\frac{d\bar{A}}{dn} = \left(-\frac{1}{n^2}\right)(P_0 - L_0) + \frac{1}{n^2}\Delta L + \frac{1}{2}\Delta A = 0$$

并由此解出

$$n = \sqrt{\frac{2(P_0 - L_0 - \Delta L)}{\Delta A}} \quad (17)$$

此 n 值即为所求的设备最佳更新年限(静态).

4.2 残值 L 呈线性递减, 年运行费 A_j 呈线性增加的动态模型及其解^[1]

设 L_j 及 A_j 的表达式同式(13)和(14), 模型流程图仍如图4所示, 考虑资金时间价值, 求 n 年平均年费用 $\bar{A}$ 的模型如下:

$$\bar{A} = [P_0 - L_0 + (n-1)\Delta L](A/F, i, n) + P_0i + A_0 + \Delta A(A/G, i, n) \quad (18)$$

利用 $\frac{d\bar{A}}{dn} = 0$, 求解使 $\bar{A}$ 达到最小值的最佳更新年限, 经推导, 有

$$\Delta L(A/F, i, n) + [P_0 - L_0 + (n-1)\Delta L] \frac{d}{dn}(A/F, i, n) + \Delta A \frac{d}{dn}(A/G, i, n) = 0 \quad (19)$$

将 $(A/F, i, n) = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$, $(A/G, i, n) = \frac{(1+i)^n - 1 - ni}{i(1+i)^n - i}$ 两式代入式(19)中, 则有

$$\frac{1}{(1+i)^n + \ln(1+i)^n} = 1 + \frac{P_0 - L_0 - \Delta L}{\Delta A - i\Delta L} i \ln(1+i) \quad (20)$$

当 $P_0, L_0, \Delta L, \Delta A$ 及折算利率 i 给定时, 可由式(20)解出设备最佳更新年限 n .

4.3 动、静态模型一致性证明

根据动、静态模型定义, 当折算利率 $i \rightarrow 0$ 时, 动态模型式(18)应变成静态模型式(16), 现证明如下:

当 $i \rightarrow 0$ 时, 式(18)中 $(A/F, i, n)$ 和 $(A/G, i, n)$ 可分别求其极限, 即

$$\lim_{i \rightarrow 0} (A/F, i, n) = \lim_{i \rightarrow 0} \frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{1}{n} \quad (21)$$

$$\lim_{i \rightarrow 0} (A/G, i, n) = \lim_{i \rightarrow 0} \frac{(1+i)^n - 1 - ni}{i(1+i)^n - i} = \frac{1}{2}(n-1) \quad (22)$$

将式(21)和(22)代入式(18)中, 并且令 $i \rightarrow 0$, 则有

$$\bar{A} = \frac{1}{n}[P_0 - L_0 + (n-1)\Delta L] + \frac{1}{2}(n-1)\Delta A + A_0$$

此式正是式(16). 动、静态模型一致性证毕.

4.4 动、静态解的一致性证明^[3]

动态解为式(20), 而静态解为式(17), 当折算利率 $i \rightarrow 0$ 时, 需要证明式(20)转变成式(17), 现证明如下:

将式(20)改写成

$$\frac{(1+i)^{-n} - 1 + \ln(1+i)^n}{i \ln(1+i)} = \frac{P_0 - L_0 - \Delta L}{\Delta A - i\Delta L} \quad (23)$$

当 $i \rightarrow 0$ 时, 式(23)右边等于 $(P_0 - L_0 - \Delta L)/\Delta A$, 而其左边为

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow 0} \frac{(1+i)^{-n} - 1 + \ln(1+i)^n}{i \ln(1+i)} &= \\ \lim_{i \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{di} [(1+i)^{-n} - 1 + \ln(1+i)^n]}{\frac{d}{di} i \ln(1+i)} &= \left(\frac{0}{0} \text{型} \right) \\ \lim_{i \rightarrow 0} \frac{n^2(1+i)^{-n-1}}{1 + 1 + \ln(1+i)} &= \frac{n^2}{2} \end{aligned}$$

左边 = 右边, 则有

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{2} &= \frac{P_0 - L_0 - \Delta L}{\Delta A} \\ n &= \sqrt{\frac{2(P_0 - L_0 - \Delta L)}{\Delta A}} \end{aligned}$$

此结果和式(17)完全一致.动、静态解一致性证毕.

5 问题讨论

设备更新是一个十分复杂的技术经济问题,本文在对设备运行费用 A_j 和残值 L 的变化进行合理假设的基础上,提出设备更新中推求经济使用年限的静态和动态的四个模型,按照平均年运行费用最少的原则推求出相应的静态和动态经济使用年限,即设备最佳更新年限.进一步从理论上证明动、静态模型及其解是一致的,即静态模型及其解仅是动态情况的特例(年折算利率为零),这也完全符合经济学中的资金时间价值理论.

推求出设备经济使用年限仅是更新分析的一部分,很显然,用什么样的设备来替代在用设备是业主更关心的问题,是采用与在用设备同型号、同功能的新设备来替换,还是用技术性能更先进的新设备来替换呢?若用前者来替换就是技术经济学中典型的‘等额重置’模型,若采用后者则又产生更复杂的所谓‘混合模型’,关于这个问题的研究工作虽有初步成果,但有不少问题值得探索,限于篇幅,本文不予讨论.

参考文献：

[1] 陈守伦. 工程经济学[M].南京:河海大学出版社,1996. 140 ~ 153.
[2] 黄渝祥,邢爱芳.工程经济学[M].上海:同济大学出版社,1985. 72 ~ 89.
[3] 唐纳德·G·纽南.工程经济分析[M].张德旺译.北京:水利电力出版社,1986. 178 ~ 201.

Research on the Convergence of Static and Dynamic Relationship for Equipment Replacement

CHEN Shou-lun, QIAN Min², HU Xiao-long¹

(1. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China ;
2. Huaihe Water Conservancy Committee, Bengbu 233001, China)

Abstract Based on reasonable assumptions of equipment salvage and annual operation cost, four dynamic and static models for equipment replacement are established, and their solutions are found. The convergence of the models and solutions are analysed in detail from the theoretical point of view. The conclusion is that the static model and solution is a special case of dynamic models and their solutions. The research presents a new approach to the study of some complex problems for equipment replacement.

Key words : equipment replacement(ER) ; static model ; dynamic model ; optimum time for ER ; salvage ; uniform annual cost