

连续参数集值下鞅的 Doob-Meyer 分解定理

朱永忠

(淮海大学数学物理系 , 江苏 南京 210098)

摘要 给出了两个定理和两个推论. 定理 1 为 若 X^* 可分, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 为 σ 域, 则 $F: \Omega \rightarrow P_{fc}(X)$ 为 $\mathcal{G}$ 可测的充要条件为 $\forall x^* \in X^*, \omega \mapsto \sigma(x^*, F(\omega))$ 为 $\mathcal{G}$ 可测的. 定理 2 给出了连续参数集值下鞅存在唯一的 Doob-Meyer 分解的充要条件.

关键词 闭凸集, 连续参数, 集值下鞅, 右连续, 分解定理

中图分类号 O211.6 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2001)01-0080-03

1 概念和记号

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一完备的概率空间, X 为实可分的 Banach 空间, 范数为 $\|\cdot\|$, 对偶空间为 X^* , 记

$$P_{(w)kc}(X) = \{A \subset X : A \text{ 非空 (弱) 闭 (凸)}\}$$

$$P_{(w)kc}(X) = \{A \subset X : A \text{ 非空 (弱) 紧 (凸)}\}$$

对于任意的 $A \in P(X)$, 记

$$\|A\| = \sup\{\|x\| : x \in A\}$$

$$\mathcal{L}^1(X) = \{F \in P(X) \text{ a.e.}; F \text{ 可测且 } E\|F\| < \infty\}$$

$$\mathcal{L}_{fc}^1(X) = \{F \in P_{fc}(X) \text{ a.e.}; F \in \mathcal{L}^1(X)\}$$

$$\mathcal{L}_{wkc}^1(X) = \{F \in P_{wkc}(X) \text{ a.e.}; F \in \mathcal{L}^1(X)\}$$

对于任意的 $x^* \in X^*, A \in P(X)$, 称

$$\sigma(x^*, A) = \sup\{\langle x^*, x \rangle : x \in A\}$$

为 A 的支撑函数.

如果 $F: \Omega \rightarrow P(X)$ 为随机集, 则 F 的积分为

$$\int_{\Omega} F dP = \{ \int_{\Omega} f dP : f \in S_F^1 \}$$

其中 $\int_{\Omega} f dP$ 为 Bochner 积分, $L^1(\Omega, X)$ 是 $\Omega \rightarrow X$ 的 Bochner 可积映射全体, $S_F^1 = \{f \in L^1(\Omega, X) : f(\omega) \in F(\omega) \text{ a.e.}\}$.

设 F 为随机集, 若有一随机集 $\mathcal{E}(F/\mathcal{F})$ 满足

$$S_{\mathcal{E}(F/\mathcal{F})}^1(\mathcal{F}) = \text{cl}\{E(f/\mathcal{F}) : f \in S_F^1\}$$

则称 $\mathcal{E}(F/\mathcal{F})$ 为随机集 F 关于 $\mathcal{F}$ 的条件期望.

对于 $A_n, A \in P(X), x^* \in X^*$, 若有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x^*, A_n) = \sigma(x^*, A)$, 则称 $\{A_n, n \geq 1\}$ 弱收敛到 A , 记为

$A_n \xrightarrow{w} A$.

2 Doob-Meyer 分解定理

定义 1 适应簇 $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为闭凸集值随机集簇, 且 $E\|F_t\| < \infty$, 若对任意 $s, t \in R_+$, 当 $s < t$ 时, 有

$$F_s \subset \mathcal{E}(F_t / \mathcal{F}_s)(a.e.)$$

则称 $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为闭凸集值连续下鞅.

定义 2 随机集簇 $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 如果满足任意 $t \in R_+, \forall x^* \in X^*$, 有

$$\lim_{s \downarrow t} \sigma(x^*, F_s(\omega)) = \sigma(x^*, F_t(\omega))$$

则称 $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为弱右连续的.

定义 3 $R_+ \times \Omega$ 上由全体左连续 $\{\mathcal{F}_t^-; t \in R_+ = [0, \infty)\}$ 适应过程产生的 σ 域 称为可料 σ 域, 记为 $\mathcal{P}$.

定义 4 $F_t: \Omega \rightarrow P_{fc}(X)$ 为随机集, $\forall t \in R_+$, 若 F_t 为 $\mathcal{P}$ 可测, 则称 $\{F_t; t \in R_+\}$ 为可料集值过程; 若 $\{\|F_\tau\| I\{\tau < \infty\}; \tau \in \zeta\}$ 为一致可积簇, 则称 $\{F_t; t \in R_+\}$ 为类 (D) 过程, 其中 ζ 为全体 $\{\mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 宽停时.

由定义显然有: 若 $\{F_t; t \in R_+\}$ 为类 (D) 过程, 则 $\forall x^* \in X^*, \{\sigma(x^*, F_t), \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为实值类 (D) 过程.

定理 1 X^* 可分, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 为 σ 域, 则 $F: \Omega \rightarrow P_{fc}(X)$ 为 $\mathcal{G}$ 可测的充要条件为 $\forall x^* \in X^*, \omega \rightarrow \sigma(x^*, F(\omega))$ 为 $\mathcal{G}$ 可测的.

证明 “ $\Rightarrow$ ”

若 $F: \Omega \rightarrow P_{fc}(X)$ 为 $\mathcal{G}$ 可测, 则存在 $\mathcal{G}$ 可测函数 $f_n: \Omega \rightarrow X, n \geq 1$ s.t.

$$F(\omega) = \text{cl}\{f_n(\omega); n \geq 1\} \\ \sigma(x^*, F(\omega)) = \sup\{\langle x^*, f_n(\omega) \rangle; n \geq 1\}$$

所以有

故有: $\omega \rightarrow \sigma(x^*, F(\omega))$ 为 $\mathcal{G}$ 可测的.

证明 “ $\Leftarrow$ ”

$F(\omega)$ 可表示为

$$F(\omega) = \bigcap_{x^* \in X^*} \{x \in X; \langle x^*, x \rangle \leq \sigma(x^*, F(\omega))\}$$

令 H 为 X^* 中可数稠子集, 取

$$\alpha(\omega) = \bigcap_{x^* \in H} \{x \in X; \langle x^*, x \rangle \leq \sigma(x^*, F(\omega))\}$$

显然有

$$\alpha(\omega) \supset F(\omega)$$

下证

$$\alpha(\omega) \subset F(\omega)$$

$\forall x \in \alpha(\omega)$, 有 $\forall x^* \in H, \langle x^*, x \rangle \leq \sigma(x^*, F(\omega)), \forall y^* \in X^*, \exists \{x_k^*; k \geq 1\} \subset H$ s.t. $x_k^* \rightarrow y^*, k \rightarrow \infty$, 且有

$$\langle x_k^*, x \rangle \leq \sigma(x_k^*, F(\omega))$$

由 $\sigma(x^*, F(\omega))$ 关于 x^* 的下半连续性及 $\langle x^*, x \rangle$ 关于 x^* 的连续性有

$$\langle y^*, x \rangle \leq \sigma(y^*, F(\omega))$$

即

$$x \in F(\omega)$$

故有

$$F(\omega) = \alpha(\omega) = \bigcap_{x^* \in H} \{x \in X; \langle x^*, x \rangle \leq \sigma(x^*, F(\omega))\}$$

由于 $\omega \rightarrow \sigma(x^*, F(\omega))$ 为 $\mathcal{G}$ 可测的, 所以 $\{x \in X; \langle x^*, x \rangle \leq \sigma(x^*, F(\omega))\}$ 为 $\mathcal{G}$ 可测的, 从而有 $F(\omega)$ 为 $\mathcal{G}$ 可测的.

推论 1 X^* 可分, 函数 $f(\omega, x^*)$ 若固定 $\omega, f(\omega, x^*)$ 为 X^* 上正齐次, 下半连续凸函数, 固定 $x^*, f(\omega, x^*)$ 为 $\mathcal{F}$ 可测的, 则存在随机集 $F \in P_{fc}(X)$ s.t. $\forall x^* \in X^*$, 有

$$\sigma(x^*, F(\omega)) = f(\omega, x^*)$$

推论 2 X^* 可分, $\mathcal{L}_{fc}(X)$ 值随机过程 $\{F_t; t \in R_+\}$ 为可料过程, 当且仅当 $\forall x^* \in X^*, \{\sigma(x^*, F_t), \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为实值可料过程.

函数 $f(\omega, x^*)$ 若满足下面两点, 则称函数 $f(\omega, x^*)$ 满足条件 (A) .

(a) 存在修正 $\tilde{f}(\omega, x^*)$, 使 $\omega \in \Omega \setminus N(x^*), f(N(x^*)) = 0$, 有

$$\tilde{f}(\omega, x^*) = f(\omega, x^*)$$

(b) $\tilde{f}(\omega, x^*)$ 为 X^* 上的正齐次, 下半连续凸函数;

若 $F = \{0\}$, 则称 F 为零值.

若 $\{F_t; t \in R_+\}$ 为一类 (D) 弱右连续 $\mathcal{L}_K(X)$ 值下鞅, 则有 $\forall x^* \in X^*, \{\alpha(x^*, F_t), \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为一类 (D) 右连续下鞅, 于是唯一存在分解:

$$\alpha(x^*, F(\omega)) = f(\omega, x^*) + g(\omega, x^*)$$

其中 $\{f(\omega, x^*); t \in R_+\}$ 为实值鞅, $\{g(\omega, x^*); t \in R_+\}$ 为零初值可料增过程. 于是若 $f(\omega, x^*), g(\omega, x^*)$ 满足条件 (A), 由推论 1 及推论 2, 存在闭凸集值随机集 $M(\omega), G(\omega)$ s.t. $\{M(\omega); t \in R_+\}$ 为集值鞅, $\{G(\omega); t \in R_+\}$ 为零初值可料增过程, 且有

$$\alpha(x^*, F(\omega)) = \alpha(x^*, M(\omega)) + \alpha(x^*, G(\omega))$$

又由 X^* 的可分性, 从而得

$$F(\omega) = \text{cl}\{M(\omega) + G(\omega)\}$$

另外, 由实值下鞅 Doob-Meyer 分解的唯一性可得 $\{M(\omega); t \in R_+\}$ 及 $\{G(\omega); t \in R_+\}$ 的唯一性.

综上所述定理:

定理 2 X^* 可分, $\mathcal{L}_K(X)$ 值类 (D) 弱右连续下鞅 $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 存在 Doob-Meyer 分解:

$$F(\omega) = \text{cl}\{M(\omega) + G(\omega)\} \quad (\text{a.e.})$$

其中 $\{M(\omega), \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为闭凸集值鞅, $\{G(\omega), \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为闭凸集值零初值可料增过程, 当且仅当上述分解式中 $f(\omega, x^*), g(\omega, x^*)$ 满足条件 (A), 且若分解存在, 则分解唯一.

参考文献:

- [1] 黄志远. 随机分析学基础 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 1988. 53 ~ 58.
- [2] 李漳南, 吴荣. 随机过程教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1987. 110 ~ 150.
- [3] 汪振鹏, 薛行鸿. 集值鞅、下鞅与上鞅 [J]. 科学通报, 1993(3): 207 ~ 209.
- [4] Aumann R J. Integrals of set-valued functions [J]. J Math Anal and Appl, 1965(12): 108 ~ 111.
- [5] Hiai F, Umegaki H. Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued function [J]. J Multiv Anal, 1977, 7: 149 ~ 182.
- [6] Papageorgiou N S. On the theory of Banach space valued multifunction: 1: Integration and conditional expectation [J]. J Multiv Anal, 1985, 17: 185 ~ 206.

The Doob-Meyer Decomposition Theorem of Continuous Parameter Set-Valued Submartingale

ZHU Yong-zhong

(Dept. of Math. and Phys., Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: In this paper, two theorems and two deductions are proved. Theorem 1 is: if X^* is separable and $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ is a σ field, $F: \Omega \rightarrow P_f(X)$ is $\mathcal{G}$ measurable when and only when $\omega \rightarrow \alpha(x^*, F(\omega))$ is $\mathcal{G}$ measurable for any $x^* \in X^*$. Theorem 2 gives the sufficient and necessary condition of continuous parameter set-valued submartingale existing Doob-Meyer decomposition.

Key words: closed convex set; continuous parameter; set-valued submartingale; right continuous; decomposition theorem