

基于紧支径向基函数的配点型无网格法

钱向东

(河海大学土木工程学院 , 江苏 南京 210098)

摘要 : 介绍基于紧支径向基函数的配点型无网格法 , 此方法无需背景积分网格 , 是一种真正的无网格法 , 且能克服全域性径向基函数所导致的系数矩阵为非带状满阵的缺点 . 通过对 Poisson 方程的求解 , 探讨配点密度和紧支域大小对解精度的影响 .
关键词 : 无网格法 ; 紧支径向基函数 ; 配点法 ; Poisson 方程
中图分类号 : TB12 文献标识码 : A 文章编号 : 1000-1980(2001)01-0096-03

有限单元法是目前求解边值问题的最强有力的方法之一 , 它以单元和分片插值为基础 , 收敛性有保证 , 且已有大量的通用软件和网格自动生成器可供使用 . 但对于不规则、非均匀的复杂高维问题仍存在着网格困扰 . 近年来兴起的无网格法抛弃了单元的概念 , 只有节点的概念 , 且可任意布置这些节点 , 有望克服高维网格困扰的问题 . 目前较为流行的无网格是以 Belytschko T 为代表的无单元 Galerkin 法(EFGM)^[1] , 它以移动最小二乘法(MLS)构造插值基函数 , 从微分方程的弱形式变分原理出发 , 导出求解问题的代数方程 . 这类方法的特点是求解精度较高 , 但计算量较大 , 且需要一套“背景网格”(background cell)作为数值积分的积分域 , 因此严格地讲它不是一种真正的无网格法 . 另一类是基于配点型加权残值法的无网格法配点法^[2] , 它采用 Hardy 提出的多重二次法(MQ 法)^[3] , 以径向基函数来逼近场函数 , 直接在离散点上满足微分方程或边界条件 , 建立求解问题的代数方程 , 是一种真正的无网格法 . 由于径向基函数的变量只有一个表示“距离”概念的径向量 r , 简便直观 , 在高维问题中更具优势 . 为了克服 MQ 法中由于径向基函数的全域性所导致的系数矩阵为非带状满阵的缺点 , 可以进一步采用 Wu Z M^[4] 和 Buhmann M D^[5] 等构造的紧支径向基函数 , 使系数矩阵具有带状稀疏性 . 本文介绍基于紧支径向基函数的无网格配点法的原理和方法 , 通过对 Poisson 方程的求解 , 探讨插值点密度和紧支域大小对解精度的影响 .

1 径向基函数逼近

对 d 维实空间中定义在 Ω 上的任意连续可微函数 $u(x)$, 可以用径向基函数近似地表示为

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^N a_i \varphi(\|x - x_i\|) \quad x \in \Omega \subset R^d \tag{1}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$
 $\|x - x_i\| = r_i(x)$ $\varphi(\|x - x_i\|) = \varphi(r_i(x))$

式中 : N ——插值结点数 ; x_i ——插值结点的坐标向量 ; a ——待定系数 ; $r_i(x)$ ——Euclidian 范数 ; $\varphi(r_i(x))$ ——径向基函数 .

为了保证函数逼近中的一致性 , 要求径向基函数 $\varphi(r_i(x))$ 必须是无条件正定的^[4,5] . 这样的径向基函数可以是 Gauss 函数 $e^{-\sigma^2}$ 、逆 MQ 函数 $(r^2 + c^2)^{\beta} (\beta < 0)$ 、正定紧支径向基函数等 . 本文采用 Wu Z M^[4] 和 Buhmann M D^[5] 等构造的具有截断多项式形式的紧支径向基函数 , 其形式如下 :

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= (1 - r)_+ && \in C^0 \cap PD_1 \\ \varphi(r) &= (1 - r)_+^3 (3r + 1) && \in C^2 \cap PD_1 \\ \varphi(r) &= (1 - r)_+^5 (8r^2 + 5r + 1) && \in C^4 \cap PD_1 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(r) &= (1-r)_+^2 & \in C^0 \cap PD_3 \\
 \varphi(r) &= (1-r)_+^3(4r+1) & \in C^2 \cap PD_3 \\
 \varphi(r) &= (1-r)_+^3(35r^2+18r+3) & \in C^4 \cap PD_3
 \end{aligned} \tag{3}$$

这里 PD_d 表示在 R^d 上是正定的.

2 配点法

由于径向基函数的连续可微性, 将由其近似表示的场函数及各阶导数直接代入边值问题的微分方程或边界条件即可建立求解待定系数向量 a 的代数方程组. 配点法的思路是在域内和边界上选定 N 个点(配点), 在这 N 个点上满足微分方程或边界条件, 建立 N 个代数方程, 求解 N 个待定系数.

边值问题的一般提法可以表示为

$$\begin{cases} L(u(x)) = f(x) & x \in \Omega \\ B(u(x)) = b(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

其中 L 和 B 为线性算子.

将场函数 $u(x)$ 用式(1)所示的径向基函数来近似表达, 则有

$$\begin{cases} L(u(x)) = \sum_{i=1}^N a_i L(\varphi(r_i(x))) = f(x) & x \in \Omega \\ B(u(x)) = \sum_{i=1}^N a_i B(\varphi(r_i(x))) = b(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

在 N 个离散点(配点) x_k ($k=1, 2, \dots, N$)上使用方程(5), 则建立的 N 个方程为

$$\begin{cases} L(u(x_k)) = \sum_{i=1}^N a_i L(\varphi(r_i(x_k))) = f(x_k) & x_k \in \Omega \\ B(u(x_k)) = \sum_{i=1}^N a_i B(\varphi(r_i(x_k))) = b(x_k) & x_k \in \partial\Omega \end{cases} \quad k=1, 2, \dots, N \tag{6}$$

进一步可用矩阵表示为

$$Sa = g \tag{7}$$

其中 $S = (S_{ki})_{1 \leq k, i \leq N}$ 是 $N \times N$ 的方阵; $a = (a_i)_{1 \leq i \leq N}$ 为待求的系数向量; $g = (g_k)_{1 \leq k \leq N}$ 是给定的右端向量. 各元素的形式如下:

$$\begin{cases} S_{ki} = L(\varphi(r_i(x_k))) & x_k \in \Omega \\ S_{ki} = B(\varphi(r_i(x_k))) & x_k \in \partial\Omega \end{cases} \quad 1 \leq k, i \leq N \tag{8}$$

$$\begin{cases} g_k = f(x_k) & x_k \in \Omega \\ g_k = b(x_k) & x_k \in \partial\Omega \end{cases} \quad 1 \leq k \leq N \tag{9}$$

由式(8)可以看出, 如果径向基函数 $\varphi(r_i(x))$ 具有紧支性, 则代数方程(7)的系数矩阵 S 具有稀疏带状性. 紧支域越小, 带宽越小; 反之亦然. 由方程(7)求出待定系数向量 a 后, 域内和边界上任意一点的场函数值可用式(1)算出.

3 算例

对二维 Poisson 方程进行分析, 探讨紧支域大小对解精度的影响. 计算时选用的紧支径向基函数为

$$\varphi(r) = (1-r)_+^3(35r^2+18r+3)$$

式中 $r = r_i/h_i$, 而 $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$, h_i 为 i 点的紧支域大小.

设 Poisson 方程及其边界条件为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 2(x^2 + y^2 - 2) & (x, y) \in \Omega = [-1, 1] \times [-1, 1] \\ u = 0 & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (10)$$

其精确解为

$$u(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2) \quad (11)$$

无网格法计算时采用等紧支域均匀配点模型. 图1给出了紧支域半径 $h = 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$ 时中心点 $(x = 0, y = 0)$ 近似解的误差与配点密度的关系, 其中 Δ 表示配点的间距. 图2给出了配点间距 $\Delta = 0.1$ 时, 中心点 $(x = 0, y = 0)$ 近似解的误差与紧支域半径 h 的关系.

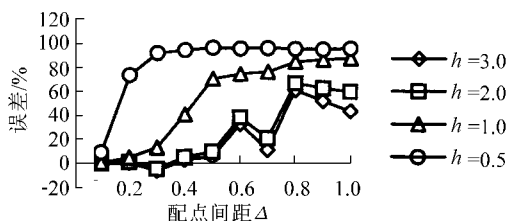


图1 配点密度与精度关系曲线

Fig.1 Accuracy versus density of collocation points

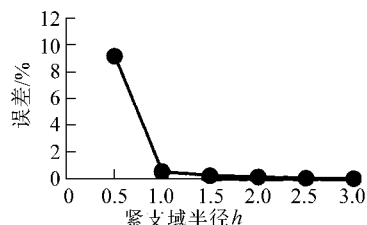


图2 紧支域半径与精度关系曲线

Fig.2 Accuracy versus radius of compactly supported domain

4 结 语

a. 基于紧支径向基函数的配点法是真正的无网格法, 无需数值积分, 算法简单, 可方便地应用于微分方程边值问题的求解.

b. 径向基函数的紧支性使代数方程组的系数矩阵具有稀疏带状性. 本文算例表明加密配点和增大紧支域半径都能提高解的精度, 但前者的代价是增加方程的阶数, 而后者仅增加系数矩阵的带宽. 当然, 紧支域半径过大会破坏系数矩阵的稀疏带状性, 增加存储量和计算量. 因此, 在具体问题 (特别是大规模问题) 的分析中, 应选取适当的紧支域半径.

c. 由于紧支径向基函数的规范性和通用性, 便于开发通用的计算程序.

d. 本文算例采用配点与插值基点重合的等点模型, 具体计算时还可采用配点与插值基点不重合的异点模型. 当问题具有非第一类边界条件时, 建立的配点方程数可能会多于未知量数, 此时可采用最小二乘配点法消除多余的方程.

参考文献:

- [1] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: An overview and recent developments[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1996, 139: 3 ~ 47.
- [2] 陆明万, 刘欣, 张雄, 等. 基于紧支径向基函数的配点型无网格法求解椭圆型边值问题[A]. 见: 姚振汉, 等主编. 力学与工程[C]. 北京: 清华大学出版社, 1999. 174 ~ 179.
- [3] Hardy R L. Multiquadric equations of topography and irregular surface[J]. Geophys Res, 1971: 1905 ~ 1915.
- [4] Wu Z M. Compactly supported positive definite radial functions[J]. Adv In Comput Math, 1995, 4: 283 ~ 292.
- [5] Buhmann M D. Radial functions on compact support[J]. Proc of Edinburgh Math Soci, 1998, 41: 33 ~ 46.

A Meshless Method with Compactly Supported Radial Basis Functions

QIAN Xiang-dong

(College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract A collocation method based on compactly supported radial basis function, a meshless method, is presented in this paper, in which the background cells for integration are not needed, and the formed system matrix is banded and sparse. The numerical solutions to a Poisson equation using this method show that the computational accuracy is influenced by the density of the collocation points and the radius of the compactly supported domain.

Key words meshless method; compactly supported radial basis function; collocation; poisson equation