

有关 Carleson 测度的等价刻画

张斌武

(河海大学常州校区数理部 , 江苏 常州 213022)

摘要 利用给出的 α 阶 Carleson 测度 ($\alpha > 0$) 的定义以及算子理论方面的有关知识去研究 Carleson 测度 , 刻画了 α 阶 Carleson 测度与某些空间的函数之间的紧密关系 , 得到了用 BO 函数、BMOA 函数等的积分不等式刻画 α 阶 Carleson 测度的定理 1 及推广定理 A 的推论 .

关键词 Carleson 测度 ; BMOA 函数 ; BO 函数

中图分类号 O29 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2001)02-0011-04

1 准备知识

本文利用的 H^p 空间、Bergman 空间的定义及其它定义见 [1, 2]. α 阶 Carleson 测度定义如下 :

定义 1 设 μ 是单位圆盘 D 上的有限正 Borel 测度 , $r > 0$, $\alpha > 0$, 如果 μ 满足

$$\sup \left\{ \frac{\mu(D(a, r))}{|D(a, r)|^\alpha}, a \in D \right\} < +\infty$$

则称 μ 是 D 上的 α 阶 Carleson 测度 , 其中 $D(a, r)$ 及 $|D(a, r)|$ 定义见 [1, 2].

在此定义中如令 $\alpha = 1$, 便得到通常意义下的 Carleson 测度 .

定义 2 定义 BO 空间如下 :

$$BO = \{f \in C(D) \text{ 且 } \|f\|_{BO} = \sup\{|f(z) - f(w)| : |z - w| \leq 1\} < +\infty\}$$

这里 $C(D)$ 是单位圆盘 D 上的连续函数全体 .

定义 3 定义 BMOA 空间如下 :

$$BMOA = \left\{ f \in H^2 \text{ 且 } \|f\|_{BMOA} = \sup \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I |f(\theta) - f_I|^2 d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}$$

式中 : I ——单位圆盘 D 的边界 ∂D 中的区间 ; $|I|$ —— I 的长度 ;

$$f_I = \frac{1}{|I|} \int_I |f(\theta)| d\theta$$

2 有关引理

定理 A^[3] 设 μ 是单位圆盘 D 上的有限正 Borel 测度 , 则 μ 是一阶 Carleson 测度 (H^p 意义下) 的充分必要条件是 : 对一切 $f \in BMOA$, 有不等式

$$\sup_{z \in D} \int_D |f(z) - f(w)| k_z(w) d\mu(w) \leq C \|f\|_{BMOA}$$

成立 . 这里 $k_z(w) = \frac{1 - |z|^2}{(1 - \bar{z}w)^2}$.

引理 1^[2] 存在正数 N 满足 : 对于任意正数 $r \leq 1$, 存在序列 $\{\lambda_n\} \subset D$ 满足以下条件 :

$$a. D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(\lambda_n, r);$$

b. $D(\lambda_n, \frac{r}{4}) \cap D(\lambda_m, \frac{r}{4}) = \emptyset, m \neq n$;

c. D 中的任意点至多属于 N 个 $D(\lambda_n, 2r)$.

引理 2^[4] 设 f 是 D 内的解析函数, $0 < r \leq 1, p > 0, z \in D, n$ 为非负整数, 则存在常数 $C_{p,n,r}$, 使得

$$|f^{(n)}(z)|^p \leq \frac{C_{p,n,r}}{|D(z,r)|^{1+\frac{np}{2}}} \int_{D(z,r)} |f(w)|^p dA(w)$$

式中: $f^{(0)} \rightarrow f(z)$ 本身; $dA(w)$ ——通常意义下的面积测度.

引理 3^[2] 设 $z \in D(a,r)$, 则

$$(1 - |z|^2)^2 \sim |D(a,r)| \sim |D(z,r)| \sim |1 - \bar{a}z|^2$$

这里 $X \sim Y$ 是指存在常数 C, C' , 使得 $C'Y \leq X \leq CY$.

引理 4^[2] 设 $z \in D, c$ 是实数, $t > -1$, 并设

$$I_{c,t}(z) = \int_D \frac{(1 - |w|^2)^t}{|1 - z\bar{w}|^{2+t+c}} dA(w)$$

则有

a. 如 $c > 0$, 则 $I_{c,t}(z) \sim \frac{1}{(1 - |z|^2)^t}$ ($|z| \rightarrow 1^-$);

b. 如 $c < 0$, 则 $I_{c,t}(z)$ 关于 z 有界.

引理 5^[5] 设 μ 是 D 上的有限正 Borel 测度, $\alpha > \frac{1}{2}$, 则下面的 a 和 b 都是 μ 为 α 阶 Carleson 测度的充分必要条件.

a. 存在常数 $B > 0$, 对任意 $S_{\theta,h}$, 有 $\mu(S_{\theta,h}) \leq Bh^{2\alpha}$ (这里 $S_{\theta,h} = \{re^{i\theta} : 1-h \leq r < 1, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + h\}$ 为一 Carleson 方块);

b. 存在常数 $A > 0$, 对任意 $\zeta \in D$, 有

$$\int_D \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \bar{\zeta}z|^2} \right)^{\alpha} d\mu(z) \leq A$$

3 主要结果

引理 A 设 μ 是 D 上的 α 阶 Carleson 测度, $\alpha \geq 1, p$ 是实数, $p > 0$, 则存在常数 $C > 0$, 对一切 $f \in A(D)$ ($A(D)$ 是指 D 上的解析函数的全体) 有

$$\left[\int_D |f(z)|^{ap} (1 - |z|^2)^{\beta} d\mu(z) \right]^{1/\alpha} \leq C \int_D |f(z)|^p (1 - |z|^2)^{\beta/\alpha} dA(z)$$

证明 取定 $r \leq 1$ 并取 $\{\lambda_n\}$ 和 N 满足引理 1, 并设

$$\sup \left\{ \frac{\mu(D(a,r))}{|D(a,r)|^{\alpha}}, a \in D \right\} = M < +\infty$$

则对一切 $f \in A(D)$, 有

$$\begin{aligned} & \left[\int_D |f(z)|^{ap} (1 - |z|^2)^{\beta} d\mu(z) \right]^{1/\alpha} \leq \\ & \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{D(\lambda_n, 2r)} |f(z)|^{ap} (1 - |z|^2)^{\beta} d\mu(z) \right]^{1/\alpha} \leq \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} C_r^{1/\alpha} (1 - |\lambda_n|^2)^{\beta/\alpha} \mu(D(\lambda_n, r))^{1/\alpha} [\sup\{|f(z)|^{ap} : z \in D(\lambda_n, r)\}]^{1/\alpha} \leq \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} C_r^{1/\alpha} (1 - |\lambda_n|^2)^{\beta/\alpha} \mu(D(\lambda_n, r))^{1/\alpha} \sup\{|f(z)|^p : z \in D(\lambda_n, r)\} \leq \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} C_r^{1/\alpha} (1 - |\lambda_n|^2)^{\beta/\alpha} \mu(D(\lambda_n, r))^{1/\alpha} \frac{C'}{|D(\lambda_n, r)|} \int_{D(\lambda_n, 2r)} |f(z)|^p dA(z) \leq \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} C_r^{1/\alpha} \cdot C' \cdot C_{2r} \left(\frac{\mu(D(\lambda_n, r))}{|D(\lambda_n, r)|^{\alpha}} \right)^{1/\alpha} \int_{D(\lambda_n, 2r)} |f(z)|^p (1 - |z|^2)^{\beta/\alpha} dA(z) \leq \end{aligned}$$

$$C_r^{1/\alpha} \cdot C' \cdot C_{2r} \cdot M^{1/\alpha} \cdot N \int_D |f(z)|^p (1 - |z|^2)^{3/\alpha} dA(z) = \\ B \int_D |f(z)|^p (1 - |z|^2)^{3/\alpha} dA(z)$$

上面证明中,第 1 个不等式用到了引理 1,第 2 个不等式用到了引理 3,第 5 个不等式用到了引理 2 和引理 3,第 6 个不等式用到了引理 1.

定理 1 设 μ 是 D 上的有限正 Borel 测度, $\alpha \geq 1$ 则 μ 是 D 上的 α 阶 Carleson 测度的充分必要条件是:存在常数 $C > 0$, 对一切 $f \in BO$, 有

$$\sup_{z \in D} \int_D |f(z) - f(w)| |k_z(w)|^{2\alpha} d\mu(w) \leq C \|f\|_{BO}$$

证明 先证必要性, 因为 μ 是 α 阶 Carleson 测度, 又由 [2] 可知

$$|f(z) - f(w)| \leq (\beta(z, w) + 1) \|f\|_{BO}$$

再由 [2] 的一已知结果 $\beta(0, z) (1 - |z|^2)^{\frac{1}{4}} \leq C$ 以及 $\beta(z, w) = \beta(0, \varphi_z(w))$ 得

$$\int_D |k_z(w)|^{2\alpha} \beta(z, w) d\mu(w) = (1 - |z|^2)^{\alpha} \int_D \frac{(\beta(z, w))}{|1 - \bar{z}w|^{4\alpha}} d\mu(w) \leq \\ (1 - |z|^2)^{\alpha - \frac{1}{4}} \int_D \frac{(1 - |w|^2)^{\frac{1}{4}}}{|1 - \bar{z}w|^{4\alpha - \frac{1}{2}}} d\mu(w) \leq \\ \alpha (1 - |z|^2)^{\alpha - \frac{1}{4}} \int_D \frac{(1 - |w|^2)^{\frac{1}{4\alpha}}}{|1 - \bar{z}w|^{4 - \frac{1}{2\alpha}}} dA(w) \leq \\ \alpha (1 - |z|^2)^{\alpha - \frac{1}{4}} \frac{C'}{(1 - |z|^2)^{\alpha - \frac{1}{4}}}$$

上面的估计中,第 2 个不等式用到了引理 A,第 3 个不等式用到了引理 4.

由于 μ 是 α 阶 Carleson 测度, 由引理 5, 有

$$\int_D |k_z(w)|^{2\alpha} d\mu(w) = \int_D \frac{(1 - |z|^2)^{\alpha}}{|1 - \bar{z}w|^{4\alpha}} d\mu(w) \leq B < +\infty$$

所以

$$\int_D |f(z) - f(w)| |k_z(w)|^{2\alpha} d\mu(w) \leq C \int_D (\beta(z, w) + 1) |k_z(w)|^{2\alpha} d\mu(w) \cdot \|f\|_{BO} \leq C' \|f\|_{BO}$$

下证充分性, 取任意小的 $h > 0$, 作任一 Carleson 方块

$$S_{\theta, h} = \{re^{i\theta} : 1 - h \leq r < 1, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + h\}$$

取 $z_0 = (1 - 2h)e^{i(\theta_0 + \frac{h}{2})}$, 由 [3] 知, 当 $w \in S$ 时, 有

$$2h \leq |1 - \bar{z}_0 w| < \frac{\sqrt{37}}{3} h$$

取 $f(w) = \frac{1}{|1 - \bar{z}_0 w|}$, 则 $f(w) \in H^\infty \subset BO$. 取 $z = z_0$, 则有

$$|f(z) - f(w)| |k_z(w)|^{2\alpha} = \left| \frac{1}{1 - \bar{z}_0 w} - \frac{1}{1 - |z_0|^2} \right| \frac{(1 - |z_0|^2)^{\alpha}}{|1 - \bar{z}_0 w|^{4\alpha}} \geq \\ \left[\frac{1}{\frac{\sqrt{37}}{3} h} - \frac{1}{1 - (1 - (1 - 2h)^2)} \right] \frac{(1 - (1 - 2h)^2)^{\alpha}}{\left(\frac{37}{9}\right)^{2\alpha} h^{4\alpha}} \geq \frac{K}{h^{2\alpha+1}}$$

又由 [2] 可知

$$\|f\|_{BO} \leq \|f\|_B \leq C \|f\|_{BMOA} \leq \frac{C}{1 - |z_0|} = \frac{C}{h}$$

故

$$\frac{C}{h} \geq \|f\|_{BO} \geq C' \int_D |f(z_0) - f(w)| |k_{z_0}(w)|^{2\alpha} d\mu(w) \geq$$

$$C' \int_{S_{\theta,h}} |f(z_0) - f(w)| k_{z_0}(w) |^{2\alpha} d\mu(w) \geq \frac{C}{h^{2\alpha+1}} \mu(S_{\theta,h})$$

所以有

$$\mu(S_{\theta,h}) \leq Ch^{2\alpha}$$

根据引理 2(a) 可得 μ 是 α 阶 Carleson 测度.

由于 $BMOA \subset BO$, 故可得:

推论 设 μ 是有限正 Borel 测度, $\alpha \geq 1$, 则 μ 是 α 阶 Carleson 测度的充分必要条件是存在常数 $C > 0$, 对一切 $f \in BMOA$, 有

$$\sup_{z \in D} \int_D |f(z) - f(w)| k_z(w) |^{2\alpha} d\mu(w) \leq C \|f\|_{BMOA}$$

此推论把 [3] 中的定理 A 推广到更广泛的范围.

定理 1 在提高阶数的前提下, 将 [3] 的定理 A 推广到较大的空间 BO 上去了.

除了考虑 BO 空间、 $BMOA$ 空间等与 α 阶 Carleson 测度的关系外, 还可考虑其它空间(如 BA 空间、 BMO_ϕ 空间、 B_p 空间等)与 α 阶 Carleson 测度的关系. 如果解决了这些问题, 就会使 Carleson 测度的研究更加系统和完整.

参考文献:

- [1] Carleson L. An interpolation problem for bounded analytic functions[J]. Amer J Math, 1958 (80): 920 ~ 930.
- [2] Zhu K H. Operator theory in function spaces[M]. New York: Dekker, 1990. 48 ~ 59; 103 ~ 115; 120 ~ 127.
- [3] 姚璧芸. Carleson 测度与 $BMOA$ 函数[J]. 杭州: 杭州大学学报(自然科学版), 1987, 14(2): 132 ~ 140.
- [4] Lueking D H. Forward and reverse Carleson inequalities for functions in Bergman spaces and their derivatives[J]. Amer J Math, 1985, (107): 85 ~ 111.
- [5] 缪捷. Carleson 测度及有关不等式[J]. 杭州: 杭州大学学报(自然科学版), 1991, 18(2): 151 ~ 158.

Some Description of Carleson Measure

ZHANG Bin-wu

(Department of Mathematics and Physics, Hohai Univ., Changzhou, Jiangsu 213022, China)

Abstract: By use of the definition of the Carleson measure with order α ($\alpha > 0$) and some definitions of some operators, the close relationship between the Carleson measure and some special spaces, such as BO function spaces, and $BMOA$ function spaces, is described.

Key words: Carleson measure; $BMOA$ function; BO function