

大型线性代数方程组解法的探讨

徐小明¹, 汪德²

(1. 河海大学数学物理系, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学水资源水文及环境学院, 江苏 南京 210098)

摘要 针对 Saint-Venant 方程组离散后所形成的线性代数方程组的求解问题, 将 Gauss 列主元消去法与压缩存贮技术相结合, 提出了存贮单元少、舍入误差小且数值计算稳定的计算方法, 使得河网非恒定流的数值计算更加高效, 并且计算的精度可得到充分的保证.

关键词 河网非恒定流 列主元消去法 压缩存贮

中图分类号 O241.6 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2001)02-0038-05

利用 Saint-Venant 方程组求解河网非恒定流时, 通常有两种解法: 一种是由荷兰水力学家 Dronkers 提出的后经许多学者发展的分级解法^[1,2]; 另一种是 Michael Amein^[3]提出的由 Fread^[4,5]等人发展的用 Newton-Raphson 方法直接求解非线性方程组的方法. 无论是哪一种方法, 对具有 N 个断面的单一河道, 最终都要求解一系列的线性代数方程组

$$Ax = b \quad (1)$$

其中 A 为每行最多只有 4 个非零元的 $2N$ 阶五对角阵. 对方程组 (1) 的求解, 目前常用的方法有两种: 其一为消元法^[4], 其二为追赶法^[2]. 但这两种方法都有个共同的缺点, 这就是在消元或追赶过程中, 当出现分母为零或机器零的数时, 求解就不能顺利进行下去. 以往补救的办法是选择一个适当的正数 ϵ , 当某个作为分母的数 d 的绝对值小于 ϵ 时, 就令 $d = \epsilon \operatorname{sgn}(d)$ (其中 sgn 为符号函数), 以使方程组的求解能进行下去. 但当 A 的条件数 $\operatorname{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ 较大时, 即对应的线性代数方程组为病态方程组时, 经这样一改动所得的方程组的解与原方程组的解将会相差甚远, 毫无实际意义. 在河网非恒定流的数值模拟中, 对每一计算时刻的每一条河道都要求解形如 (1) 的方程组. 因此整个计算过程将要求解大量的形如 (1) 的方程组, 由于河网水流及边界条件的复杂性, 难免出现 A 的条件数较大及运算过程中出现分母为零或接近于零的情形, 从而产生误差较大的解甚至出现计算中断. 这种情况在实际问题的数值模拟中曾出现过, 它给数值计算提出了一个不可回避的问题. 如何处理好这一问题, 将直接关系到河网水力数值模拟的成败. 针对这一问题, 本文充分考虑到所求解的线性方程组系数矩阵的特点, 将 Gauss 列主元消去法与系数矩阵的压缩存贮技术相结合, 提出了存贮单元少、舍入误差小且数值计算稳定的计算方法, 即使 A 的条件数较大时, 用该方法也能得到方程组 (1) 的很好的近似解, 从而使得河网非恒定流的数值计算得以顺利进行, 并且计算的精度可得到充分的保证.

1 压缩存贮

存贮量少、计算量小且数值计算稳定, 一直是人们在求解方程组时所追求的目标. $2N$ 元方程组 (1) 的系数矩阵可表为

[illegible]

令

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} \\ d_{2N-2,1} & d_{2N-2,2} & d_{2N-2,3} & d_{2N-2,4} \\ d_{2N-1,1} & d_{2N-1,2} & d_{2N-1,3} & d_{2N-1,4} \\ d_{2N,1} & d_{2N,2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} d_{15} \\ d_{25} \\ d_{2N-1,5} \\ d_{2N,5} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{i,j+i-2} & i = \text{偶数}, j = 1, 2, 3, 4 \\ a_{i,j+i-3} & i = \text{奇数}, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (4)$$

显然 D 为 $2N \times 4$ 阶矩阵. 根据矩阵 D 与矩阵 A 的关系(4), 消元过程中对矩阵 A 的变换可用对矩阵 D 的变换来实现. 这样可做到用 $2N \times 4$ 个单元存贮 $2N \times 2N$ 的矩阵系数 A .

2 压缩存储形式的列主元消去法

根据列主元消去法具有舍入误差小,对非奇异阵计算都能顺利进行的优点,本文采用列主元消去法解方程组(1).然而,若对方程组(1)用通常的列主元消去法,由于要进行系数矩阵的行对换,原先的 $2N \times 4$ 个单元存贮就不够了,需要新增存贮单元.本文考虑到系数矩阵 A 的特点,充分利用了列主元消去法过程中出现的零元素所对应的存贮单元,注意到只需存贮消元过程中非零元即可,将列主元消去法与压缩存贮技术相结合,实现了在求解过程中系数矩阵始终用 $2N \times 4$ 个单元存贮,无需新增存贮单元.其算法如下:

设方程组(1)的系数矩阵 A 非奇异,并记

$$d_{1j}^{(1)} = d_{1j} \quad d_{15}^{(1)} = d_{15} \quad j = 1, 2, 3, 4 (\text{其中 } d_{11}^{(1)} = d_{12}^{(1)} = d_{11} = d_{12} = 0) \quad (5)$$

则由系数矩阵和右端向量组成的增广矩阵为

[illegible]

设消去法已进行 $2m-2$ 步, 得到与(1)等价的方程组 $A^{(2m-1)}x = b^{(2m-1)}$, 此时对应的增广矩阵是

$$[A^{(2m-1)} | b^{(2m-1)}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} d_{13}^{(1)} & d_{14}^{(1)} & d_{11}^{(1)} & d_{12}^{(1)} & & & & d_{15}^{(1)} \\ 0 & d_{22}^{(2)} & d_{23}^{(2)} & d_{24}^{(2)} & & & & d_{25}^{(2)} \\ 0 & 0 & d_{33}^{(3)} & d_{34}^{(3)} & d_{31}^{(3)} & d_{32}^{(3)} & & d_{35}^{(3)} \\ & & & & d_{2m-1,3}^{(2m-1)} & d_{2m-1,4}^{(2m-1)} & d_{2m-1,1}^{(2m-1)} & d_{2m-1,2}^{(2m-1)} \\ & & & & d_{2m,1} & d_{2m,2} & d_{2m,3} & d_{2m,4} \\ & & & & d_{2m+1,1} & d_{2m+1,2} & d_{2m+1,3} & d_{2m+1,4} \\ & & & & & & & d_{2N,1} & d_{2N,2} & d_{2N,5} \end{array} \right] \quad (7)$$

其中 $d_{2m-1,1}^{(2m-1)} = d_{2m-1,2}^{(2m-1)} = 0$.

第 $2m-1$ 步: a. 第 $2m-1$ 列选主元, 并进行行对换. 设 $d_{2m-1} = \max \{ |d_{2m-1,3}^{(2m-1)}|, |d_{2m,1}|, |d_{2m+1,1}| \}$. (a)

若 $d_{2m-1} = |d_{2m-1,3}^{(2m-1)}|$, 则(7)不需进行行对换; (b) 若 $d_{2m-1} = |d_{i1}|$, $i = 2m, 2m+1$, 则对(7)进行第 $2m-1$ 行与第 i 行的对换, 对换后的增广矩阵仍用(7)表示. b. 第 $2m-1$ 列消元, 将 $[A^{(2m-1)} | b^{(2m-1)}]$ 变换为

$$[A^{(2m)} | b^{(2m)}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} d_{13}^{(1)} & d_{14}^{(1)} & d_{11}^{(1)} & d_{12}^{(1)} & & & & d_{15}^{(1)} \\ 0 & d_{22}^{(2)} & d_{23}^{(2)} & d_{24}^{(2)} & & & & d_{25}^{(2)} \\ 0 & 0 & d_{33}^{(3)} & d_{34}^{(3)} & d_{31}^{(3)} & d_{32}^{(3)} & & d_{35}^{(3)} \\ & & & & d_{2m-1,3}^{(2m-1)} & d_{2m-1,4}^{(2m-1)} & d_{2m-1,1}^{(2m-1)} & d_{2m-1,2}^{(2m-1)} \\ & & & & 0 & d_{2m,2}^{(2m)} & d_{2m,3}^{(2m)} & d_{2m,4}^{(2m)} \\ & & & & 0 & d_{2m+1,2}^{(2m)} & d_{2m+1,3}^{(2m)} & d_{2m+1,4}^{(2m)} \\ & & & & & & & d_{2N,1} & d_{2N,2} & d_{2N,5} \end{array} \right] \quad (8)$$

其中

$$d_{ij}^{(2m)} = d_{ij} - l_{i1} d_{2m-1,k}^{(2m-1)} \quad l_{i1} = \frac{d_{i1}}{d_{2m-1,3}^{(2m-1)}} \quad i = 2m, 2m+1; j = 2, 3, 4, 5; k = \begin{cases} 4, & j = 2 \\ 1, & j = 3 \\ 2, & j = 4 \\ 5, & j = 5 \end{cases}$$

第 $2m$ 步: a. 第 $2m$ 列选主元, 并进行行对换. 设 $d_{2m} = \max \{ |d_{2m,2}^{(2m)}|, |d_{2m+1,2}^{(2m)}| \}$. (a) 若 $d_{2m} = |d_{2m,2}^{(2m)}|$, 则(8)不需进行行对换; (b) 若 $d_{2m} = |d_{2m+1,2}^{(2m)}|$, 则对(8)进行第 $2m$ 行与第 $2m+1$ 行的对换, 对换后的增广矩阵仍用(8)表示. b. 第 $2m$ 列消元, 将 $[A^{(2m)} | b^{(2m)}]$ 变换为

$$[A^{(2m+1)} | b^{(2m+1)}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} d_{13}^{(1)} & d_{14}^{(1)} & d_{11}^{(1)} & d_{12}^{(1)} & & & & d_{15}^{(1)} \\ 0 & d_{22}^{(2)} & d_{23}^{(2)} & d_{24}^{(2)} & & & & d_{25}^{(2)} \\ 0 & 0 & d_{33}^{(3)} & d_{34}^{(3)} & d_{31}^{(3)} & d_{32}^{(3)} & & d_{35}^{(3)} \\ & & & & d_{2m-1,3}^{(2m-1)} & d_{2m-1,4}^{(2m-1)} & d_{2m-1,1}^{(2m-1)} & d_{2m-1,2}^{(2m-1)} \\ & & & & 0 & d_{2m,2}^{(2m)} & d_{2m,3}^{(2m)} & d_{2m,4}^{(2m)} \\ & & & & 0 & 0 & d_{2m+1,3}^{(2m+1)} & d_{2m+1,4}^{(2m+1)} & d_{2m+1,1}^{(2m+1)} & d_{2m+1,2}^{(2m+1)} \\ & & & & & & & d_{2N,1} & d_{2N,2} & d_{2N,5} \end{array} \right] \quad (9)$$

A Method for Solving Large Size Linear Algebraic Equations

XU Xiao-ming¹, WANG De-guan²

(1. Dept. of Mathematics and Physics, Hohai Univ., Nanjing 210098, China ;

2. College of Water Resources and Environment, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract :Two kinds of methods are commonly used for solving large size linear algebraic equations which are derived from Saint-Venant equations :one is the elimination method, and another is the double-sweeping method. Two methods, however, have the disadvantage that they would fail when the denominator is zero or machine zero. This paper proposes a method which combines the Gauss main-element elimination method with compress-storage technique to solve the equations more efficiently and accurately. The application of the method to a large network proves that it is an efficient method with less-storage requirement, small rounding off error and high stability.

Key words :river network ;main-element elimination method ;compress-storage

欢迎订阅

全国水利系统优秀期刊

江苏省优秀期刊

欢迎投稿



水利水电科技进展

新颖 实用 快捷

双月刊, A4 开本, 彩色封面, 64 页, 2001 年全年定价 30.00 元, 全国各地邮局均可订阅

国际标准刊号: ISSN 1006-7647

国内统一刊号: CN 32-1439/TV

国外发行代号: DK 32003

(中国出版对外贸易总公司)

国内邮发代号: 28-244

编辑部地址: 210098 南京市西康路 1 号

联系电话: (025) 3713777-50335

电子信箱: kkb@hhu.edu.cn

银行账号: 南京工行宁海路分理处

02114249-0102459

(也可直接汇款至编辑部订阅,
另加 6.00 元邮寄费)