

结构可靠度分析的变 f 序列响应面法及其应用

武清玺,卓家寿

(河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 提出了结构可靠度分析的变 f 序列响应面法和相应的收敛控制准则,并应用于非线性极限状态函数的可靠度计算.该方法用简单的二次函数逐步逼近原来的复杂函数,并由该二次函数计算可靠指标的近似值.这一方法简化了迭代计算过程,减少了迭代次数,有效地提高了计算精度和计算效率,对于大型复杂结构的可靠度分析较为适宜,并可推广应用于动力问题等的可靠度分析.

关键词 非线性 极限状态函数 序列响应面法 可靠度分析

中图分类号 :TU311.2 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2001)02-0075-04

在结构可靠度分析中,以一次二阶矩法为基础的 JC 法应用最广,并被国内外工程结构可靠度设计规范普遍采用,但这一方法的缺点是当变量离散性大或极限状态方程高度非线性时,可靠度计算将产生较大的误差.二次可靠度分析法虽能有效地提高计算精度,但其计算机时却大大增加,用于大型复杂结构的可靠度计算尚有困难.近年来国外学者研究较多的结构可靠度分析的响应面法在提高计算精度和减少计算机时方面均有优点,是用于大型复杂结构可靠度分析的好方法.

结构可靠度计算的响应面法由 Wong 于 1984 年首先提出,1985 年应用于土坡稳定的可靠度计算^[1].这一方法是用一简单的显式函数逐步逼近复杂的隐式(或显式)函数,并计算其对应的可靠度,其优点是可以直接应用确定性结构分析程序,而不必对中间计算过程进行修改.用二次响应面函数逼近非线性极限状态函数计算结构可靠度,与 Taylor 一次展开法相比,计算精度明显提高.而计算机时则减少约 1/3.所以,结构可靠度计算的响应面法尤其适用于大型复杂结构的可靠度分析,有重要的理论研究意义和推广应用价值.

1 结构可靠度分析的响应面法

早期的响应面函数取为基本变量的一次式^[1],其表达式为

$$y' = g'(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i \tag{1}$$

为了提高可靠度计算的精度,Bucher 于 1990 年提出了一种结构可靠度分析的二次响应面法^[2],并被大家所接受,表达式为

$$y' = g'(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 \tag{2}$$

一次、二次响应面法计算结构可靠度的过程基本相同,下面以含有两个变量的二次响应面法为例说明这一方法的计算过程.

设实际的极限状态函数为

$$y = g(x_1, x_2) \tag{3}$$

它一般是非线性的,取二次响应面函数

$$y' = g'(x_1, x_2) = a_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \tag{4}$$

式中的系数 a_0, b_i, c_i 为待定常数,需由 $2n+1$ 个样本点得到足够的方程来确定.为了使响应面函数获得好的逼近效果,样本点的选取是非常重要的.由于所选取的样本点较少,应使其包含较多的极限状态函数的信

息,为达此目的,文献[2]建议沿 x_i 轴逐步逼近选取.

第一步是以均值点为中心点,样本点在 $(\mu_x - f\sigma_x, \mu_x + f\sigma_x)$ 内选取, f 的取值一般在 $1 \sim 3$ 之间. 由 $g(x_1, x_2)$ 在样本点处的 $2n+1$ 个函数值,可以确定响应面函数中的系数. 响应面函数确定之后,即可求出 $y' = g'(x_1, x_2) = 0$ 的可靠指标和设计验算点 (x_{D_1}, x_{D_2}) 的值,此即实际极限状态方程可靠度计算的第1次近似,显然,设计验算点 (x_{D_1}, x_{D_2}) 并不在实际极限状态面上. 第2步是怎样确定新一轮样本点的中心点,而使得在此区域内选取的样本点包含实际极限状态面更多的信息,为达此目的,新的样本中心点 x_M 选在由均值点 μ_x 与设计验算点 x_D 的直线上,并保证在新的中心点处满足 $g(x_M) = 0$,即

$$x_M = \mu_x + (x_D - \mu_x) \frac{g(\mu_x)}{g(\mu_x) - g(x_D)} \quad (5)$$

新的样本中心点确定之后,用与前述相同的方法选取新一轮的样本点并确定待定系数,然后计算出对应的可靠指标和设计验算点,即为实际极限状态方程的可靠指标和设计验算点. 整个求解过程需计算 $4n+3$ 个 $g(x)$ 的值. 响应面函数与实际极限状态函数的几何表示见图1,两轮迭代计算的逼近过程见图2.

2 结构可靠度分析的变 f 序列响应面法

结构可靠度分析响应面法是经过两轮迭代得到可靠指标和设计验算点的近似值. 这一方法具有较好的计算精度并且适用于静力、动力、线性、非线性等问题^[2~4]. 虽然文献[5]提出了序列响应面法的收敛控制准则,但对 f 值的选取与变化问题没有讨论. 所以目前该方法尚存在

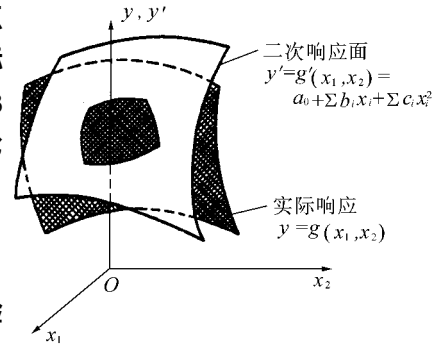


图1 二次响应面

Fig.1 Two-order response surface

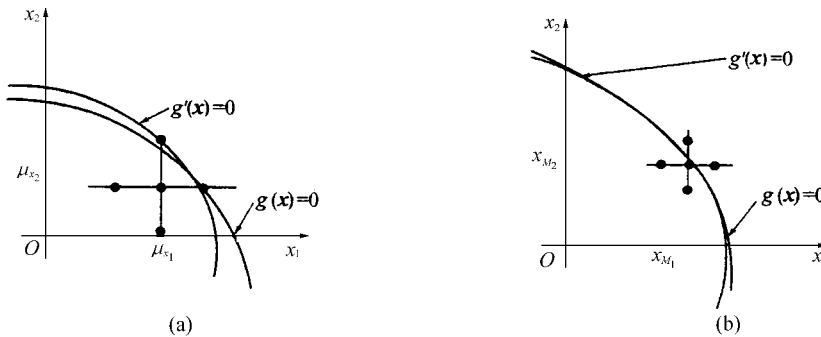


图2 二次响应面的逼近过程

Fig.2 Approximated procedure with two-order response surface

一些不足之处:(a)计算精度需要与计算方法相对应的控制准则;(b)不能保证对各种极限状态方程的求解都能获得满意的结果;(c)样本点选取的尺度参数 f 取值范围偏大且不够明确.

针对上述不足之处,本文提出了变 f 序列响应面法和计算精度的控制准则. 设以包含两个变量的极限状态函数 $g(x)$ 为例,响应面函数逐步逼近的过程及设计验算点、样本中心点的位置如图3所示. 第1次近似取各变量的均值 μ_x 为中心点 x_{M_1} ,变量的各样本点在 $(x_{M_1} - f\sigma_x, x_{M_2} + f\sigma_x)$ 内选取,尺度参数 $f = 2.0$,得到的响应面函数为 $g'_1(x)$,设计验算点为 x_{D_1} (图3). 通过线性插值式(5)可得第2轮抽样的中心点 x_{M_2} ,取尺度参数 $f = 1.0$ 选取新的一组样本点,可得到响应面函数 $g'_2(x)$ 和设计验算点 x_{D_2} . 重复上述过程,直到响应面函数逼近实际的极限状态面达到所需的精度,计算精度的控制准则为

$$\epsilon_M = |g(x_D) - g'(x_D)| < \epsilon_0 \quad (6)$$

式中 ϵ_0 为给定的控制参数.

计算实践表明,一般只需 $3 \sim 4$ 轮迭代即可在最大可能破坏点附近获得与实际极限状态面吻合良好的响应面函数,并得到精度较高的可靠指标.

对于非正态变量和相关变量,用当量正态化方法并转换为相互独立的正态变量后,上述计算方法同

适用.

3 算 例

根据上面给出的计算方法,笔者编写了一次、二序列响应面法计算结构可靠度的程序,通过多个算例^[4,6]验证了计算方法和程序的正确性.

例 1 设非线性极限状态方程为

$$g(x,y) = \exp[0.2x + 6.2] - \exp[0.47y + 5.0] = 0$$

式中 x, y 为相互独立的标准正态变量. 表 1 给出了 Monte Carlo 法模拟 100 万次的准精确解和本文一次、二序列响应面法算得的结果.

例 2 设非线性极限状态方程为

$$g(x,y) = \exp[0.4(x + 2) + 6.2] - \exp[0.3y + 5.0] - 200 = 0$$

式中 x, y 为相互独立的标准正态变量. 本例用 Monte Carlo 法模拟 100 万次得到的准精确解和本文方法得到的结果列于表 2.

表 1 例 1 的可靠指标
Table 1 Reliability indices for example 1

计算方法	f	β	迭代次数	误差 (β)
Monte Carlo 法		2.351		准精确解
一次序列响应面法	变化 (2.0→1.0)	2.298	4	2.0%
二次序列响应面法	变化 (2.0→1.0)	2.354	3	0.1%
	不变 (1.0)	2.341	3	0.4%

表 2 例 2 的可靠指标
Table 2 Reliability indices for example 2

计算方法	f	β	迭代次数	误差 (β)
Monte Carlo 法		2.685		准精确解
一次序列响应面法	变化 (2.0→1.0)	2.860	3	6.5%
二次序列响应面法	变化 (2.0→1.0)	2.771	3	3.0%
	不变 (1.0)	2.730	3	1.7%

表 3 例 3 的可靠指标
Table 3 Reliability indices for example 3

计算方法	f	β	迭代次数	误差 (β)
Monte Carlo 法		3.382		准精确解
一次序列响应面法	变化 (2.0→1.0)	3.375	4	0.2%
二次序列响应面法	变化 (2.0→1.0)	3.349	3	1%
	不变 (1.0)	3.347	3	1%

表 4 例 4 的可靠指标
Table 4 Reliability indices for example 4

计算方法	f	β	迭代次数	误差 (β)
Monte Carlo 法		2.330		准精确解
一次序列响应面法	变化 (2.0→1.0)	2.452	3	5.2%
	变化 (2.0→1.0)	2.439	3	4.7%
二次序列响应面法	不变 (1.0)	2.443	3	4.8%

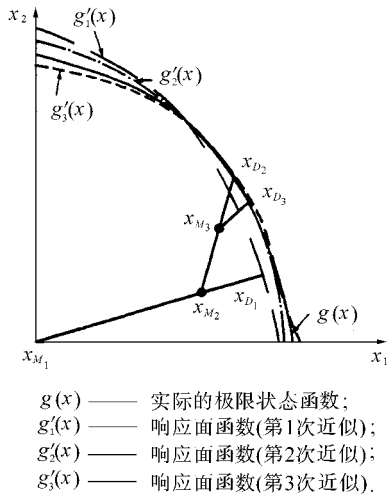


图 3 二序列响应面逼近极限状态面过程
Fig.3 Procedure closed to the true function by two-order sequential RSM

例 3 设极限状态方程为一凹函数,即

$$g(x,y) = \exp[0.2x + 1.4] - y = 0$$

式中 x, y 为相互独立的标准正态变量. 计算结果列于表 3.

例 4 一矩形截面悬臂梁,受到均布荷载作用,其自由端挠度不超过 $l/325$ 的极限状态方程为

$$g(w,b) = \frac{l}{325} - \frac{w \cdot b \cdot l^4}{8EI} = 0$$

式中 w, b, l, E 和 I 分别为单位面积上的荷载、梁深、梁长、弹性模量和截面惯性矩. 为方便,上述极限状态方程可简化为

$$g(x_1,x_2) = 18.46154 - 7.476923 \times 10^{10} \frac{x_1}{x_2} = 0$$

其中 x_1 为荷载,单位为 MPa; x_2 为梁深,单位为 mm. 荷载及梁深均为正态分布,均值 $\mu_1 = 1$ kPa, $\mu_2 = 250$ mm,变异系数为 $V_1 = 0.2, V_2 = 0.15$. E, l 为确定性量,其值分别为 26 GPa 和 6 m. 本例算得的结构可靠指标列于表 4.

上面给出的 4 个非线性极限状态方程的算例,既有凸函数又有凹函数,用变 f 一次、二序列响应面法得到的可靠指标与准精确解相比误差均低于 5%,精度是比较满意的,而且,一般来说变 f 二序列响应面法比一次序列响应面法得到的计算结果更加稳定和精确.

4 结 语

大型复杂结构的可靠度分析一直是人们关

注的研究课题,实用高效的分析方法是解决这一问题的关键.本文提出的变 f 二次序列响应面法简便实用,计算精度可望高于一次可靠度分析方法,给出的收敛控制准则可以保证迭代计算的收敛精度.该方法以确定性结构计算为基础,可以直接应用现有的结构分析程序,可靠度计算时直接应用确定性结构计算的结果,不必考虑其中间运算过程,对于大型结构非线性问题的可靠度分析更为适宜,可见这一方法有良好的应用前景.

参考文献:

- [1] Wong F S. Slope reliability and response surface method[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1985, 111: 32 ~ 53.
- [2] Bucher C G, Bourgund U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems[J]. Structural Safety, 1990, 7: 57 ~ 66.
- [3] Faravelli L. Response-surface approach for reliability analysis[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1989, 115: 2736 ~ 2781.
- [4] Raja Shekhar M R, Ellingwood B R. A new look at the response surface approach for reliability analysis[J]. Structural Safety, 1993, 126: 205 ~ 220.
- [5] Liu Y W, Moses F. A sequential response surface method and its application in the reliability analysis of aircraft structural system[J]. Structural Safety, 1994, 16: 39 ~ 46.
- [6] Kim S H, Na S W. Response surface method using vector projected sampling point[J]. Structural Safety, 1997, 19(1): 3 ~ 19.

A Sequential Response Surface Method with Various f and Its Application to Structural Reliability Analysis

WU Qing-xi, ZHUO Jia-shou

(College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract A sequential response surface method with various f and a criterion of convergence are proposed for calculation of structural reliability analysis. The method may alleviate the complex function by giving a simple two-order function which can then be used for the reliability analysis. The computing procedure is simplified and the precision of calculation of the reliability is improved. It is suitable for large and complicated structures and can be extended to dynamic reliability analysis.

Key words nonlinear; limit state function; sequence response surface method; reliability analysis