

基于运动波数值扩散的洪水演算方法

黄国如¹, 芮孝芳²

(1. 清华大学水利水电系, 北京 100084; 2. 河海大学水文水资源及环境学院, 江苏 南京 210098)

摘要 基于运动波方程差分解的数值扩散在一定条件下可以模拟扩散波物理扩散的新途径, 对马斯京根-康吉洪水演算方法和具有预见期的洪水演算方法进行了分析, 给出了方法的稳定性条件. 对两条天然河道的应用表明, 洪峰流量、峰现时间和过程线等的预报精度均达到了《水文情报预报规范》的要求.

关键词 运动波; 扩散波; 数值扩散; 物理扩散; 洪水演算

中图分类号 P338 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2001)02-0110-04

扩散波是一种忽略惯性项作用的洪水波, 在沿河道传播过程中它发生坦化与变形. 根据圣维南方程组导出的扩散波方程为^[1]

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} = D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \tag{1}$$

式中: Q ——流量; u, D ——扩散波的波速和扩散系数. 当 u 和 D 为常数时, 式(1)为线性扩散波方程.

在式(1)中, 如果只研究对流作用而不计及扩散作用, 则其变为下列运动波方程:

$$LQ \equiv \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

由于运动波只传播而不扩散, 因此, 式(2)的解析解不能反映天然河道中洪水波既传播又扩散的运动规律. 但如果引进某种差分格式, 将式(2)化为差分方程, 则可能出现数值扩散. 在一定条件下, 可以应用运动波差分解带来的数值扩散来模拟扩散波的物理扩散, 从而达到数值求解式(2)的目的.

1 基本原理

1.1 马斯京根-康吉演算法

如果采用四点偏心加权差分格式(图1), 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{X(Q_i^{j+1} - Q_i^j) + (1-X)(Q_{i+1}^{j+1} - Q_{i+1}^j)}{\Delta t} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{Y(Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}) + (1-Y)(Q_{i+1}^j - Q_i^j)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{3}$$

则式(2)变为差分方程

$$LnQ \equiv \frac{X(Q_i^{j+1} - Q_i^j) + (1-X)(Q_{i+1}^{j+1} - Q_{i+1}^j)}{\Delta t} + u \frac{Y(Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}) + (1-Y)(Q_{i+1}^j - Q_i^j)}{\Delta x} \tag{4}$$

式中: X, Y ——时间差分的权重和空间差分的权重; i, j ——空间和时间格点序号.

将式(4)进行若干数学处理, 最终得到

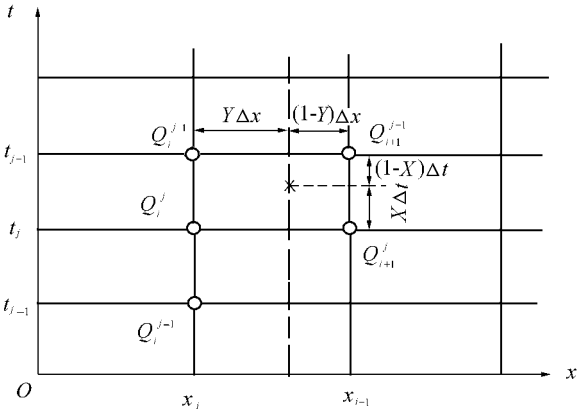


图 1 四点偏心加权差分格式

Fig. 1 Four point weighted difference grid

$$\text{Ln} Q - D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} - D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \text{Ln} Q - \varepsilon_2 - \dots \quad (5)$$

式中 ε_2 为差分方程与微分方程之间的二阶精度截断误差. 式(5)成立的条件为

$$D = u\Delta x \left[\left(\frac{1}{2} - X \right) + r \left(\frac{1}{2} - Y \right) \right] \quad (6)$$

式(5)表明,当应用偏心加权差分格式(3),将运动波方程式(2)化为式(4)时,由于截断误差的影响,式(4)的解仅是式(2)的一阶精度解.如果满足式(6),则差分方程(4)的解变为扩散波方程(1)的二阶精度解.也就是说,只要式(6)得以满足,不仅可以获得用运动波方程的数值扩散来模拟扩散波的物理扩散的效果,而且解的精度提高到二阶.

在式(4)中,令 $Y = \frac{1}{2}$,可以从式(4)中解出 Q_{i+1}^{j+1} 为

$$Q_{i+1}^{j+1} = C_1 Q_i^j + C_2 Q_i^{j+1} + C_3 Q_{i+1}^j \quad (7)$$

其中: $C_1 = \frac{0.5 + X/r}{(1-X)/r + 0.5}$, $C_2 = \frac{0.5 - X/r}{(1-X)/r + 0.5}$, $C_3 = \frac{(1-X)/r - 0.5}{(1-X)/r + 0.5}$, 均为演算系数; $r = u\Delta t/\Delta x$; $\Delta x/u$ 为洪水波在河段长为 Δx 中的传播时间.由此可见,式(7)与马斯京根法演算公式的形式完全一样.有鉴于此,称由式(7)构成的洪水演算方法为马斯京根-康吉法^[2,3].此时,条件式(6)变为

$$X = \frac{1}{2} - \frac{1}{P} \quad (8)$$

式中 P 为 Peclet 数, $P = u\Delta x/D$.

由于该演算格式为显式有限差分格式,所以需研究它的稳定性.由 Von Neumann 稳定性分析方法求得该格式的稳定性条件为

$$X \leq 0.5 \quad r \leq 1 \quad (9)$$

1.2 具有预见期的演算法

若利用向前差分来近似空间偏导数项,利用带权差分来近似时间偏导数,则式(2)变为差分方程

$$\text{Ln} Q = \frac{\theta(Q_i^j - Q_i^{j-1})}{\Delta t} + \frac{(1-\theta)(Q_{i+1}^{j+1} - Q_{i+1}^j)}{\Delta t} + \frac{u(Q_{i+1}^j - Q_i^j)}{\Delta x} = 0 \quad (10)$$

式中 θ 为河道上、下断面流量对时间导数的权重系数.

采用差分格式(10)来近似运动波方程(2)必将带来截断误差,比较式(2)和(10)易知

$$\text{Ln} Q = \text{Ln} Q + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots \quad (11)$$

式中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 分别为用式(10)近似式(2)所产生的一阶、二阶截断误差.将式(10)中的各个函数在 Q_i^j 处进行 Taylor 级数展开,可以得到一阶截断误差为

$$\varepsilon_1 = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \left(\frac{u\Delta x}{2} - \frac{1}{2}u^2\Delta t - u\theta\Delta x + u^2\theta\Delta t \right) \quad (12)$$

$$\text{如果令} \quad \frac{u\Delta x}{2} - \frac{1}{2}u^2\Delta t - u\theta\Delta x + u^2\theta\Delta t = D \quad (13)$$

则式(11)就变成为

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} - D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \text{Ln} Q - \varepsilon_2 - \dots \quad (14)$$

从以上分析可知,如不计及一阶截断误差式(12),则差分方程式(10)的解是运动波方程(2)的一阶精度近似解.若计及一阶误差,且满足条件式(13),则差分方程式(10)的解变为扩散波方程式(1)的二阶精度近似解.

由式(10)解出

$$Q_{i+1}^{j+1} = C_1 Q_i^{j-1} + C_2 Q_i^j + C_3 Q_{i+1}^j \quad (15)$$

式中 $C_1 = \frac{\theta}{1-\theta}$, $C_2 = \frac{r-\theta}{1-\theta}$, $C_3 = 1 - \frac{r}{1-\theta}$, 均为演算系数.式(15)为具有一个计算时段的预见期的洪水演算方法的基本方程.

由式(13)可知此时的模拟条件为

$$\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{P(1-r)}$$

(16)

由数值计算理论可知,该格式的稳定性条件为 $r \leq 1$ 及 $\theta \leq 0.5$.

2 实例研究

选用 70 年代以来汉江襄阳—皇庄河段的 7 场次洪水和西江梧州—高要河段的 8 场次洪水来验证本文讨论的洪水演算方法. 根据各场次洪水的涨落情况, 为保证计算精度, 这两个河段的计算时段 Δt 均取为 6 h. 先给出各个河段的参数 u 和 D 的初值: 襄阳—皇庄河段分别为 1.83 m/s 和 34 770 m²/s; 梧州—高要河段为 2.31 m/s 和 30 000 m²/s. 流量演算的结果见图 2、图 3 和表 1.

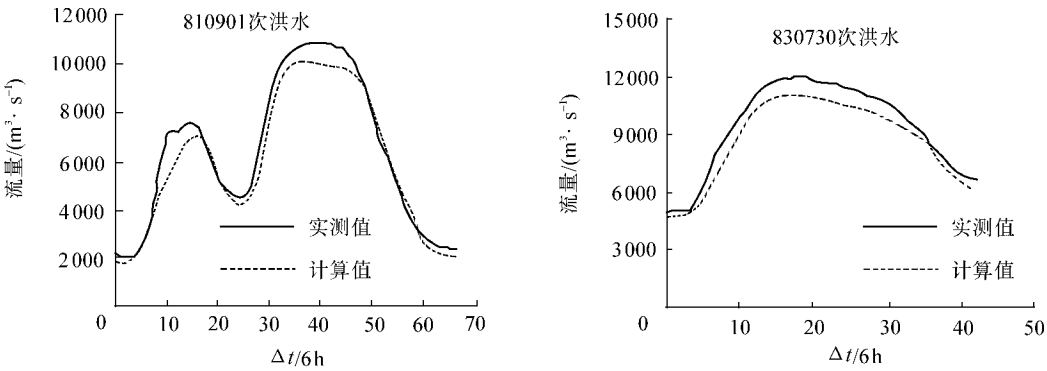


图 2 马斯京根—康吉演算法所得到的皇庄站过程

Fig. 2 The hydrograph for Huangzhuang station by Muskingum-Cunge method

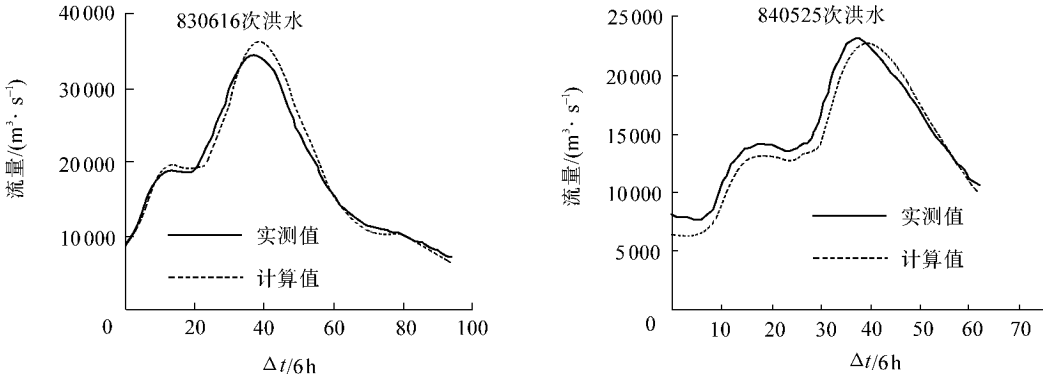


图 3 具有预见期的演算法所得到的高要站过程

Fig. 3 The hydrograph for Gaoyao station in consideration of prediction duration

由表 1 可见,不论是马斯京根—康吉演算法,还是具有预见期的演算法,各站次洪水的洪峰流量的相对误差在 $\pm 15\%$ 以内的占 88%,峰现时间误差在 2 个时段以内的占 86.7%,过程线的确定性系数大于 0.9 的占 80%,可见计算精度令人满意,达到了《水文情报预报规范》的要求.同时还可以看出,这两个演算模型的计算精度非常接近.

3 结 论

本文基于运动波数值扩散的概念,分别建立了马斯京根—康吉洪水演算法和具有预见期的洪水演算方法.它们均是扩散波方程的二阶精度数值解.由于分别采用不同的差分格式,这两种演算方法的模拟条件各不相同,马斯京根—康吉方法的模拟条件为式(8),具有预见期的洪水演算方法的模拟条件为式(16).

本文介绍的两种方法都是扩散波方程的二阶精度数值解,但后者本身具有一个计算时段的预见期.这两种方法相对比较简单,计算简便,并且不需要过多的河道断面资料.从计算实例可以清楚地看出,两者的精度均较高,且非常接近.

表 1 基于运动波数值扩散的洪水演算成果

Table 1 The flood routing result based on numerical dispersion of kinematic-wave

站名	洪号	马斯京根-康吉演算法					具有预见期的演算法				
		洪峰流量			峰现误差 (时段)	确定性 系 数	洪峰流量			峰现误差 (时段)	确定性 系 数
		实 测 $(\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1})$	计 算 $(\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1})$	误 差 /%			实 测 $(\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1})$	计 算 $(\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1})$	误 差 /%		
皇 庄	741 002	18 900	18 947	0.2	0	0.96	18 900	18 959	0.3	0	0.97
	800 720	10 400	9 883	5.0	- 1	0.90	10 400	9 828	5.5	- 1	0.91
	810 820	12 600	10 810	14.2	- 2	0.92	12 600	10 798	14.3	- 3	0.92
	810 901	10 900	10 207	6.4	- 1	0.96	10 900	10 217	6.3	- 1	0.97
	820 727	10 600	8 942	15.6	- 1	0.63	10 600	8 984	15.2	- 1	0.63
	830 730	12 100	11 197	7.5	0	0.93	12 100	11 196	7.5	0	0.94
	850 603	4 330	3 632	16.1	1	0.49	4 330	3 651	15.7	2	0.49
高 要	780 516	36 367	35 432	2.6	0	0.93	36 367	35 385	2.7	- 1	0.92
	800 713	21 700	23 123	- 6.6	- 2	0.93	21 700	23 108	- 6.5	- 2	0.93
	800 812	25 900	27 817	- 7.4	- 1	0.96	25 900	27 798	- 7.3	- 1	0.96
	820 506	22 600	22 298	1.3	- 2	0.97	22 600	22 273	1.4	- 3	0.96
	820 809	21 500	22 177	3.2	- 3	0.97	21 500	22 179	- 3.2	- 3	0.97
	830 616	34 367	36 045	- 4.9	- 2	0.99	34 367	36 046	- 4.9	- 2	0.99
	840 155	16 600	14 844	10.6	1	0.77	16 600	14 984	10.5	0	0.76
	840 525	23 200	22 786	1.8	- 2	0.97	23 200	22 771	1.8	- 2	0.96

参考文献：

[1] 芮孝芳. 产汇流理论[M]. 北京: 水利电力出版社, 1994. 61 ~ 62.

[2] Cunge J A. On the subject of flood propagation computation method(Muskingum method [J]. Hydraul Res , 1969 , 7 (2) : 205 ~ 230.

[3] 芮孝芳. 运动波数值扩散与洪水演算方法[J]. 水利学报 , 1987 , 2 : 37 ~ 43.

[4] SL—250—2000 ,水文情报预报规范[S].

Flood Routing Method Based
on Numerical Dispersion of Kinematic-wave

HUANG Guo-ru¹ ,RUI Xiao-fang²

(1. Department of Hydraulic Engineering ,Tsinghua Univ. ,Beijing 100084 ,China ;
2. College of Water Resources and Environment ,Hohai Univ. ,Nanjing 210098 ,China)

Abstract :Based on the discretion of linear kinematic – wave equation by the finite difference method and the concept of numerical dispersion a method is developed to model the physical dispersion. The Muskingum – Cunge routing model and the routing model with a prediction duration are developed in this paper. The models have been applied to the flood routing for a practical channel , and good results are obtained.

Key words kinematic-wave ; diffusion-wave ; numerical dispersion ; physical dispersion ; flood routing