

用奇怪吸引子理论研究紊流脉动压力特性

王玲玲,黄细彬,金忠青

(淮海大学水利水电工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 通过奇怪吸引子理论研究,提出在‘重构相空间’中计算紊流脉动压力时间序列的关联维数,得出该关联维数取值随嵌入空间维数的变化规律,证明了高流速紊流脉动压力系统中存在奇怪吸引子,并经计算得出了奇怪吸引子的分数维,该维数即为描述吸引子结构所必须的状态变量的最小数目.

关键词 混沌 相空间 吸引子 关联维 紊流 脉动压力

中图分类号 :TU131.2+1 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2001)03-0008-04

自然界中存在着大量无法精确预测的现象,如天气变化、股市涨落等,人们称这些现象为随机现象.一般认为,只要收集并研究足够多的相关信息,仍可对这些现象作出较为准确的预测.然而本世纪初,数学家庞加莱却指出,在某些特定的系统中,初始条件的微小变化会导致系统的未来无法预测.紊流脉动压力分布就具有这一特性,对初始条件、测点位置等试验因素极度敏感,是一个无法预测未来的混沌系统.然而,混沌的系统并不意味着完全的无序.在混沌的表象下常隐藏着一种有序的结构——奇怪吸引子^[1].

1 奇怪吸引子

根据运动稳定性理论,如果将一个动力系统的独立变量构成一个空间,则该空间就是系统的相空间.取相空间中的某点作为出发点(也就是以系统的某个状态作为初始状态),随着时间的推移,系统的运动就在相空间中描绘出一条轨迹.如果从相空间中任意一点出发的轨迹最终都被吸引到某一特定区域中,那么,就称这个区域为系统的吸引子.吸引子就是动力系统行为的归宿.

若吸引子是一个点,则称之为不动点.若吸引子为一环面,则称之为极限环.不动点和极限环分别为 0 维和 1 维即整数维吸引子.若系统的运动轨迹到达一个区域之后,既不稳定于某点,也不稳定于某环面,而是表现为在这一几何区域中的无数次折迭、扭曲、互不交叉,且该区域还有如下特点:(a)它是相空间中的一个子集,具有非整数的几何维数即分维数;(b)对初始条件十分敏感,进入该区域的位置稍有差异,系统其后的运动轨迹就会千差万别;(c)具有稳定、低维、非周期、不相交和自相似性.那么这个几何区域就是“奇怪吸引子”.图 1 为著名的洛伦兹动力系统:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= -\sigma(x-y) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= rx-y-xz \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= xy-bz \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

当参数 σ, b, r 取值分别为 10.0, 8/3, 28.0 时的奇怪吸引子.图 2 为法国天文学家伊农于 1976 年发现的弯月形的伊农吸引子,它是运用简单的方程 $x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2$ 和 $y_{n+1} = bx_n$,当参数 a, b 分别取为 1.4 和 0.3 时,经过 3 万次反复迭代得到的.

洛伦兹吸引子的维数为 2.06,表示该吸引子所占据的空间比平面多,比立方体少.而伊农吸引子的维数

收稿日期 2000-04-21

基金项目 国家自然科学基金资助项目(59579013)

作者简介 王玲玲(1966—),女,江苏射阳人,博士,副教授,主要从事水力学及河流动力学研究.

为 1.26,表示其所占据的空间介于直线和平面之间.这两个著名的吸引子都是从确定性系统中经反复的迭代计算而产生的.由图 1,2 可见,它们均具有上述奇怪吸引子的特征.

紊流由于粘性作用,其相空间将不断收缩,即紊流系统是耗散系统.耗散是系统整体稳定性的表现,它使运动轨迹最终都能稳定地被吸引到吸引子上,使相体积稳定缩小^[2].同时,进入吸引子后,系统的运动轨迹又随‘进入’时的方向和位置的不同而不同,所以,奇怪吸引子具有整体稳定和局部不稳定双重特性.

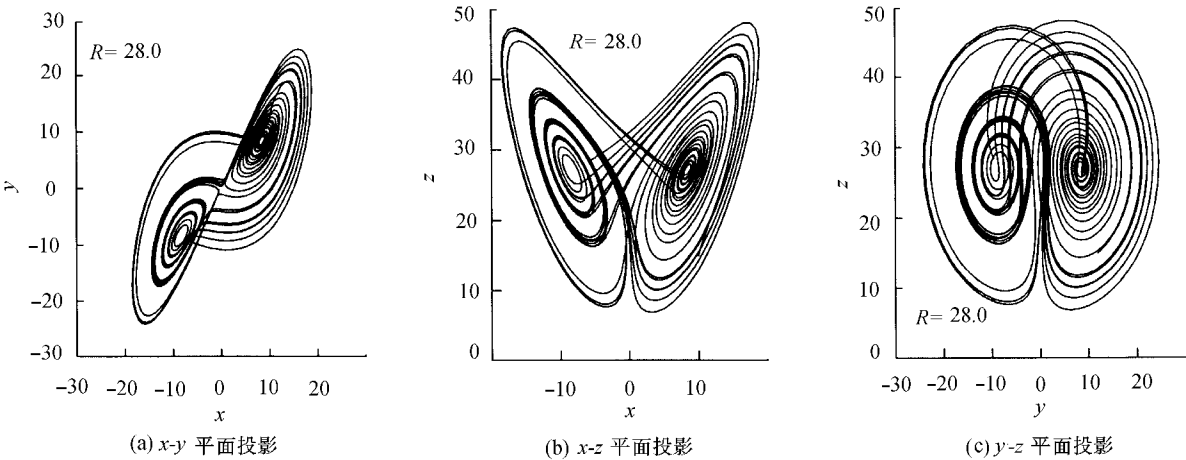


图 1 洛伦兹吸引子
Fig.1 Lorenz attractor

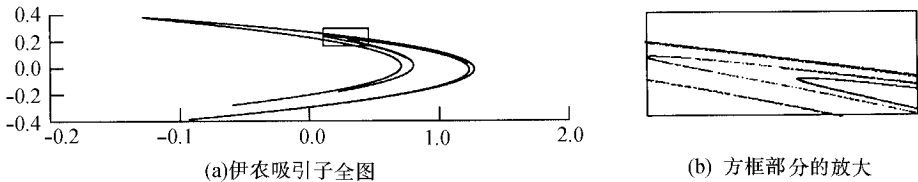


图 2 伊农吸引子
Fig.2 Henon attractor

2 相空间重构

在奇怪吸引子内部,系统运动轨迹对初始条件极端敏感的特性,可用来解释诸如天气变化、股市涨落、紊流涡团运动的随机性和长期不可预测性,同时,研究奇怪吸引子的结构也是探求随机现象内在规律的重要手段.

维数是表征奇怪吸引子特性的最重要的物理指标,它可以反映出无序系统中所隐含的有序结构最基本的几何特征.但如何从实测的紊流运动特征量如压力、速度的时间序列中证明奇怪吸引子的存在,并计算出该吸引子的维数?由于动力系统物理量总是相互影响和关联的,某一物理量的演化过程总是与系统中其它参量的演化过程相关联,因此系统的信息,也就隐含在任一参变量的发展演化过程中,研究该参量离散的时间序列,也可以获得系统的特性^[3].为此,法国数字家 RUELLE 于 1981 年提出重构相空间概念:设某动力系统有 k 个独立的状态变量(变量 p 是其中之一),可构成 k 维相空间.用变量 p 的离散时间序列 $p(t)$ 和它的连续漂移 $p(t + \tau), p(t + 2\tau), \dots, p[t + (n - 1)\tau]$,重构相空间,其中 τ 称为延滞参数.即用时间序列 $P(0) = \{p(0), p(1), \dots, p(n - 1)\}; P(1) = \{p(1), p(2), \dots, p(n)\}; P(2) = \{p(2), p(3), \dots, p(n + 1)\}; \dots; P(m - 1) = \{p(m - 1), p(m), \dots, p(n + m - 2)\}$ 构成 n 维空间中的 m 个点, n 又称为嵌入空间维数.这样就用 n 维嵌入空间代替了 k 维状态空间,且 m 个点就在嵌入空间中形成了一条运动轨迹.

为了计算嵌入空间中奇怪吸引子的维数,可采用以下方法:任给一个正数 r ,计算嵌入空间内 m 个点中间距小于 r 的点对数,间距小于 r 的点对数占总点对的比值应为(总点对数为 m^2)

$$c(r) = \frac{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \theta[r - \|p(i) - p(j)\|]}{m^2}$$

(2)

其中 $\theta[x]$ 为 Heaviside 函数,它的定义为

$$\theta[x]=\begin{cases}1 & x>0 \\ 0 & x<0\end{cases}\tag{3}$$

若 r 取值太大,则所有点对的距离可能都小于 r ,因而有 $c(r)=1,\ln c(r)=0$ 适当缩小 r 值,可能在 r 的某一段区间内, $c(r)$ 随 r 的变化关系近似为

$$c(r)=r^D\tag{4}$$

即在 $\ln c(r)$ 和 $\ln r$ 的关系曲线上,存在一个近似的直线段,那就说明该动力系统存在奇怪吸引子,且直线的斜率 D 就是该吸引子的维数.这样求得的维数 D 又称为关联维数.由‘维数’的定义可以知道,描述这一动力系统中奇怪吸引子所需的最小变量个数即为 D .

3 脉动压力的关联维数

在河海大学水工水力学实验室的高速水流循环系统中,实测得了 2 组清水和 2 组浑水水流的脉动压力,如图 3 所示.实验用水自高压水箱经一短泄水孔口流入试验水槽中,试验水流为明渠流.水槽长度为 3.5 m,槽身坡度可以自由调整(本次试验中取水槽坡度为零).试验用沙取自黄河花园口,水流中含沙量用比色瓶直接从水中取样经分析天平称重测定.水流脉动压力采用 YCW-A 微型压力传感器量测.有关试验的水力参数见表 1.

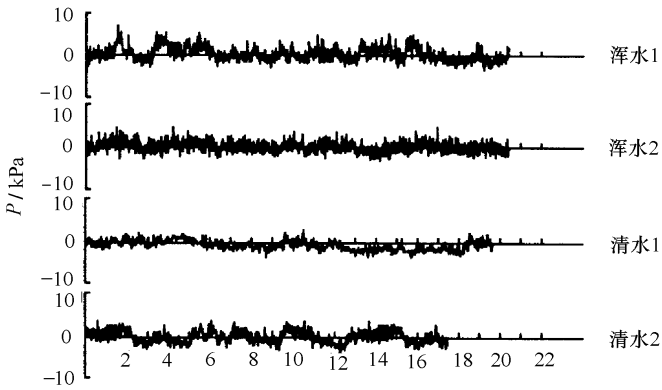


图 3 脉动压力资料
Fig.3 Pulsating stress signal

表 1 试验参数
Table 1 Experiment parameter

工况	水头/m	流速/(m·s ⁻¹)	测点距出流孔口距离/mm	节点总数
浑水 1	20.00	18.90	990	1 034
浑水 2	20.00	18.90	210	1 033
清水 1	12.60	14.97	990	965
清水 2	18.95	18.37	990	882

注 1. 浑水工况含沙量为 20 kg/m³ 2. 数据采集时间间隔为 0.02 s.
数据采集时间间隔为 0.02 s,即延滞时间 τ 取为 0.02 s.运用上述重构相空间的理论和方法计算得各工况的 $\ln c(r)$ 和 $\ln r$ 的对应关系曲线见图 4,关联维数随嵌入空间维数的变化见图 5.计算过程中,将延滞时间 τ 取为 0.04 s,计算得关联维数随嵌入空间维数的变化规律基本不变.

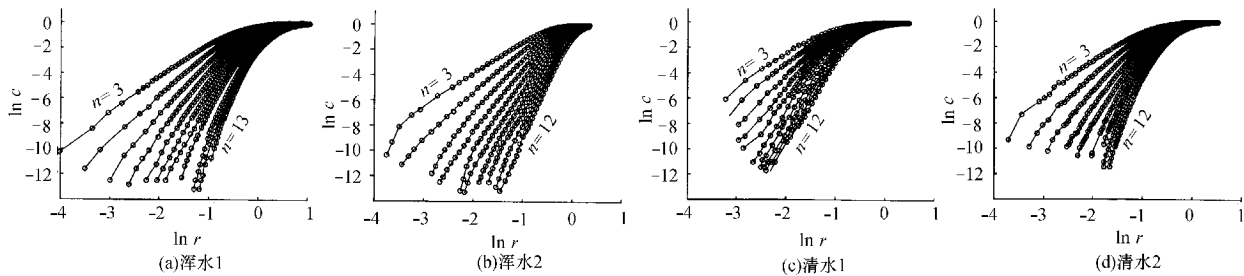


图 4 $\ln c(r)$ 和 $\ln r$ 对应关系
Fig.4 Relationship between $\ln c(r)$ and $\ln r$

4 计算结果分析及结论

由计算结果图 4 和图 5 可以看出,随着嵌入空间维数 n 的增加,图 4 中的曲线斜率将渐趋于一定值,该值即为关联维数 D .这一特性就证明了在高流速紊动水流的脉动压力系统中存在奇怪吸引子.根据分形理论可知,关联维数 D 值即为该吸引子的维数,该值也表示描述紊动系统所需要独立变量的最小数目.所以,

本项研究中所测得的浑水序列的奇怪吸引子维数约为 7~8,而清水系统约为 5~6,描述浑水和清水系统的运动最少分别需要 7 个和 5 个独立变量,在紊流的数模及物模试验中对浑水系统需着重研究至少 7 个物理量,而对清水系统则需研究至少 5 个物理量,才能获得较为完整的流动信息.

从理论上讲,为了保证“重构相空间”方法的成功应用,延滞时间 τ 的选择应使所构成的 n 维空间中各个分量都是相互独立的. 计算实践表明, τ 取 0.02 和 0.04,计算结果变化不大,因此只要所取原始脉动压力资料采集点数足够多, τ 的取值对计算结果影响不大,因此,“重构相空间”的方法是一种研究物理量离散时间序列的实用方法,该方法方便快捷,易于实现.

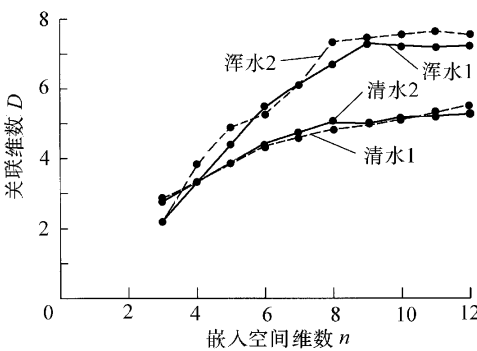


图 5 关联维数与嵌入空间维数变化关系曲线

Fig.5 Relationship between correlation dimension D and phase space dimension n

参考文献：

[1] 汪富泉,李后强.分形几何与动力系统[M].哈尔滨:黑龙江教育出版社,1993.122~134.
[2] 王东生,曹磊.混沌分形及其应用[M].北京:中国科学技术出版社,1993.167~169.
[3] 王玲玲,金忠青.分形理论及其在紊流研究中的应用[J].河海大学学报,1997,(1):1~5.

Study on Pulsating Stress of Turbulence with Strange Attractor Theory

WANG Ling-ling,HUANG Xi-bing,JIN Zhong-qing

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract In this paper, a method for calculating correlation dimension by use of pulsating stress signal in phase space is presented. The relationship between the correlation dimension and phase space dimension is obtained. It appears that there is indeed an attractor embedded in the phase space. The fraction dimension which discribes the structure of the attractor is deduced.

Key words :chaos ;phase space ;attractor ;correlation dimension ;turbulent flow ;pulsating stress