

部分水深平均二维计算模型的研究

杜彦良, 褚君达

(河海大学水文水资源及环境学院, 江苏 南京 210098)

摘要 通过研究天然河流中瞬时源排放近区垂向混合规律, 建立了部分水深平均二维计算模型. 推导出瞬时点源垂向均匀混合的纵向距离及垂向部分混合水深的理论表达式. 并建立线源排放垂向均匀混合的纵向距离及垂向部分混合水深的函数关系. 把上述成果引入部分水深平均二维计算模型, 将其应用于长江河口段罗丹明示踪剂瞬时源排放浓度场的计算中, 计算结果与现场跟踪监测资料及全场水深平均二维模型的计算值进行比较, 可看出部分水深平均模型计算值与实测值验证较好, 而全水深平均模型的计算值在近排放口范围内与实测值相差较大.

关键词 瞬时源 垂向混合距离 部分水深混合 二维数值模型

中图分类号 :X143 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2001)03-0012-05

天然河流中, 由于水流的紊动及河床的摩擦等原因, 产生垂向混合的作用. 一般认为河流中的点状污染源在垂向上的很短一段距离内就可达到混合. 张书农^[1]等在长江下游某河段水面上投放罗丹明(Rhodamine-B)示踪剂, 作为连续点源, 研究该河段的垂向扩散规律, 得出距投放点 1 km 内, 深度上并未达到完全均匀分布. 他移用 H. B. Fischer^[2]提出的横向均匀混合距离的经验公式来计算垂向均匀混合距离 L_z , $L_z = \xi_z \bar{U} H / E_z$. 其中 H 为水深; E_z 为垂向混合系数; $\bar{U}$ 为断面平均流速; ξ_z 为经验系数. 张永良和李玉梁^[3]提出相同的经验公式, 认为系数 ξ_z 亦可参照 H. B. Fischer 的经验公式, 河底及水面排放时取 $\xi_z = 0.4$, 垂向中心排放时取 $\xi_z = 0.1$. Rutherford^[4,5]提出 L_z 的估算式, 在垂向浓度差不超过 2% 即为“充分混合”的假定上, 得出河底及水面排放时取 $\xi_z = 0.536$, 垂向中心排放时取 $\xi_z = 0.134$.

上述垂向混合距离的经验公式, 均缺少必要的理论推导及实测资料验证. 本文在前人工作基础上, 对该问题作进一步的理论探讨和应用研究.

1 瞬时点源垂向混合规律

1.1 瞬时点源垂向均匀混合距离

本文以宽浅河段的瞬时点源排放为例进行分析, 近区离排放点 $(0, 0, 0)$ 的距离一般较短, 污染物的降解影响较小, 因此可忽略该项, 并考虑到水面及河底反射. 得到点源浓度场解析解为

$$C(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi t)^{3/2} (E_x E_y E_z)^{1/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x - \bar{U}t)^2}{4E_x t} - \frac{y^2}{4E_y t} - \frac{(z - 2nH)^2}{4E_z t} \right] \quad (1)$$

式中: x, y, z ——沿河长、河宽及河深方向的坐标; n ——河底及水面反射次数; M ——点源排放量; H ——河流水深; E_x, E_y, E_z ——纵向、横向及垂向混合系数. 因为是表面排放, 所以最大浓度与最小浓度分别在水面与河底处. 表面及河底浓度分别为 $C(x, 0, 0, t)$, $C(x, 0, H, t)$, 设河底与水面的浓度比值为 P_m , 根据 $C(x, 0, H, t) = P_m C(x, 0, 0, t)$ 列出方程

$$2 \exp \left[-\frac{(x - \bar{U}t)^2}{4E_x t} - \frac{H^2}{4E_z t} \right] = P_m \left[\exp \left[-\frac{(x - \bar{U}t)^2}{4E_x t} \right] + \exp \left[\frac{(x - \bar{U}t)^2}{4E_x t} - \frac{(z - 2H)^2}{4E_z t} \right] \right] \quad (2)$$

定义污染物在近区垂向均匀混合距离 l_{mix} 为排放点到垂向均匀混合处的纵向长度. 一般认为最小浓度与最

大浓度之差在 5% 以内,可认为达到完全均匀混合,因此取 $P_m = 95\%$,并在式(1)中取 $n = 0, 1$,代入式(2),求解方程得到全水深均匀混合所需时间为 $t = H^2/[4E_z \ln(2/P_m)]$,则可得出

$$l_{\text{mix}} = \bar{U}t = \frac{\bar{U}H^2}{4\ln(2/P_m)E_z} = \left[\frac{1}{4\ln(2/P_m)} \right] \frac{\bar{U}H^2}{E_z} = \xi_z \frac{\bar{U}H^2}{E_z} \quad (3)$$
$$\xi_z = 1/[4\ln(2/P_m)]$$

式(3)即是垂向均匀混合距离的理论表达式.

天然河流中,通常取 $E_z = \alpha_z H U_*$,将其代入式(3),并取 $\beta = 1/[4\alpha_z \ln(2/P_m)]$,其中 $\alpha_z = 0.067^{[1]}$,求得 β 的理论值为 5.0. 将有关量代入式(3)得

$$l_{\text{mix}} = \beta H \frac{\bar{U}}{U_*} = \beta H \frac{C_c}{\sqrt{g}} = \beta H C_0 \quad (4)$$

式中: C_c ——谢才系数; C_0 ——无因次谢才系数. 从式(4)中可看出, l_{mix} 与河流的摩阻特性及水深有关. 式(4)即是垂向均匀混合距离的另一形式的理论表达式.

1.2 瞬时点源垂向部分混合水深

在垂向上未均匀混合的长度范围内,污染物只在部分水深中均匀混合,设部分混合水深为 h_p ,根据这一概念,由式(1)取 $n = 0, 1$,得出如下方程:

$$\exp\left[-\frac{h_p^2 \bar{U}}{4E_z x}\right] + \exp\left[-\frac{(h_p - 2H)^2 \bar{U}}{4E_z x}\right] = P_m \left[1 + \exp\left[-\frac{H^2 \bar{U}}{E_z x}\right]\right] \quad (5)$$

鉴于此方程很难直接解析求解,先进行变量代换. 设 x^* 为垂向上部分均匀混合水深的无因次纵向距离, $x^* = x/l_{\text{mix}}$,即 $x = x^* l_{\text{mix}}$. 另外设 $h_p^* = h_p/H$, h_p^* 为无因次部分混合水深. 将方程(5)化成:

$$\exp\left[-\frac{h_p^{*2}}{4\alpha_z \beta x^*}\right] + \exp\left[-\frac{(h_p^* - 2)^2}{4\alpha_z \beta x^*}\right] = P_m \left[1 + \exp\left(-\frac{1}{\alpha_z \beta x^*}\right)\right] \quad (6)$$

方程(6)中, α_z 已知, β 由计算得 5.0,采用取定 h_p^* 试算 x^* 的方法,绘出 h_p^* 与 x^* 的关系,如图 1 所示,从图中看出,排放点处的部分混合水深为 0,且当纵向上某一点到排放点的距离等于全水深混合长度 l_{mix} ,即 x^* 为 1.0 时, h_p^* 亦为 1.0,即 h_p 等于 H ,此结果是合理的.

为简化计算,图 1 中的点用一条曲线来近似拟合,拟合的表达式为: $h_p^* = 0.014 \exp(\beta x^*)^{0.9}$,如图中实线所示. 将相应的 h_p^* 与 x^* 代入计算式,在垂向混合距离内, $x_p = x$,化简后得到部分均匀混合水深的表达式

$$h_p = 0.014 H \exp\left[\frac{x_p}{H C_0}\right]^{0.9} \quad 0 < x_p \leq l_{\text{mix}} \quad (7)$$

其中 x_p 为部分均匀混合水深 h_p 到排放点的距离. 当 $h_p = H$ 时,有 $x_p = l_{\text{mix}}$.

式(4)中 α_z 通常取 0.067,是根据水流的对数流速分布推求的. J. M. Pearson 和 I. Guymer^[6] 在波浪条件下研究了垂向混合过程,得出了在有波浪的水流中, E_z 要比无波浪水流中的 E_z 大 20%. 因此,可根据实际情况,酌情修正 α_z, β 及相应的 l_{mix}, h_p 的值.

2 瞬时线源垂向混合规律

2.1 瞬时线源垂向混合距离及部分混合水深的函数关系

实际污染物排放很难达到理想点源的状态,而线源能比较好地描述实际排放. 先考虑无限空间中的情况,由瞬时点源的浓度解析解,得到线源浓度表达式:

$$C = \int_{z_1}^{z_2} C_* dz = \frac{M}{(4\pi t)^{3/2} (E_x E_y E_z)^{1/2}} \exp\left[-\frac{[(x - x_1) - Ut]^2}{4E_x t} - \frac{(y - y_1)^2}{4E_y t}\right] \int_{z_2}^{z_1} \exp\left[-\frac{(z' - z)^2}{4E_z t}\right] dz \quad (8)$$

令 $\delta = \frac{z}{\sqrt{4E_z t}}$,将 δ 代入式(8),积分变换后,考虑河底及水面反射的影响,求得相应的解析解为

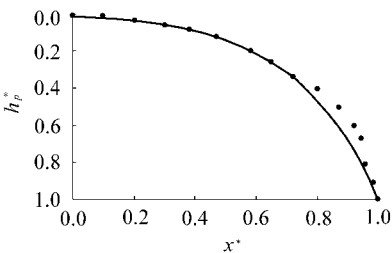


图 1 瞬时点源 $h_p^* \sim x^*$ 关系曲线

Fig.1 Relationship of h_p^* and x^* for instantaneous source

$$C(x,y,z) = \frac{M}{2\pi t(E_y E_z)^{1/2}} \exp\left[-\frac{[(x-x_1)-Ut]^2}{4E_x t} - \frac{(y-y_1)^2}{4E_y t}\right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\operatorname{erf}\frac{(z-2nH)-z_1}{\sqrt{4E_z t}} - \operatorname{erf}\frac{(z-2nH)-z_2}{\sqrt{4E_z t}}\right] \quad (9)$$

考虑表面排放, $z_1 = 0$, 并取 $n = 0, 1$. 根据上述部分混合概念, 列出方程:

$$P_m \left[\operatorname{erf} \frac{z_2}{\sqrt{4E_z t}} + \operatorname{erf} \frac{2H}{\sqrt{4E_z t}} - \operatorname{erf} \frac{2H-z_2}{\sqrt{4E_z t}} \right] = \left[\operatorname{erf} \frac{z}{\sqrt{4E_z t}} - \operatorname{erf} \frac{z-z_2}{\sqrt{4E_z t}} + \operatorname{erf} \frac{2H-z}{\sqrt{4E_z t}} - \operatorname{erf} \frac{2-z-z_2}{\sqrt{4E_z t}} \right] \quad (10)$$

令 $z_2 = \gamma H (0 < \gamma < 1)$, $h_p^* = z/H$

$$x = \beta H \frac{C_c}{\sqrt{g}} \quad (11)$$

代入式(10), 得到方程:

$$P_m \left[\operatorname{erf} \frac{r}{\sqrt{4\alpha_d \beta}} + \operatorname{erf} \frac{2}{\sqrt{4\alpha_d \beta}} - \operatorname{erf} \frac{2-\gamma}{\sqrt{4\alpha_d \beta}} \right] = \operatorname{erf} \frac{h_p^*}{\sqrt{4\alpha_d \beta}} - \operatorname{erf} \frac{h_p^*-\gamma}{\sqrt{4\alpha_d \beta}} + \operatorname{erf} \frac{2-h_p^*}{\sqrt{4\alpha_d \beta}} - \operatorname{erf} \frac{2-h_p^*-\gamma}{\sqrt{4\alpha_d \beta}} \quad (12)$$

γ 为线源的相对深度, 画出诺模图(图 2). 图中 $\gamma = 0$ 时, 即为点源排放情况. h_p^* 为 1.0 时, x 为 l_{mix} , 且 γ 与 β 一一对应, 由式(11)得

$$l_{\text{mix}} = \beta H \frac{U}{U_*} = \beta H C_0 \quad (13)$$

可由式(13)计算出不同线源 γ 的垂向均匀混合距离. 到排放口的任一距离相应部分混合水深从图 2 查得. 图 2 中各曲线反映了瞬时源浓度峰值到达距离与均匀混合水深的关系.

2.2 全水深均匀混合长度的验证

1999 年 1 月, 河海大学环境水利研究所和英国 Brixham 环境实验室对长江南通河段大、小潮进行同步观测, 测得大量水位及流速资料, 为了测定污染物在水流中的扩散规律, 采用罗丹明溶液作为示踪剂. 将罗丹明干粉加入适量的甲醇及醋酸, 使其溶解并使其混合液比重接近 1. 示踪物在水流中移动的平面位置用 GPS 定位, 用可潜入水中的拖挂式荧光仪连续跟踪测量其浓度. 测验落潮瞬时源浓度场时, 罗丹明干粉排放量为 4 kg, 排放方式均为表面瞬时源排放. 实际测验中, 罗丹明溶液由船上倾倒至江中, 由于水流作用, 排放源潜入水中大约 1.5 m, 成为线源, 因此取 $\gamma = 0.1$, 垂向均匀混合处 $\beta = 4.8$, 如图 2 中 $\gamma = 0.1$ 的曲线.

用 3 组全水深已达到均匀混合的实测资料来验证式(13). 在实际河流中, 各处水深均不相同, 先由排放点处线源长度、水深及流速等作为其初始排放特性, 浓度场峰值随时间顺着水流下行, 每一时段代入各点处的水力要素, 逐段计算部分均匀混合水深, 直至浓度在全水深均匀混合, 该处到排放点的距离即为垂向均匀混合距离. 验证结果见表 1, 表中水力要素仅为各次排放过程中的代表量. 从表 1 中可以看出, 由式(13)算得的垂向均匀混合距离与实测情况符合较好.

表 1 垂向均匀混合距离计算值与实测值的比较

Table 1 Comparison between calculated and measured vertical mixing distance

实测 编号	排放点水深 /m	流速 /(m·s ⁻¹)	全河段水面比降 /×10 ⁻⁶	摩阻流速 U_* /(m·s ⁻¹)	由诺模图查 l_{mix} /m	实测 l_{mix} /m
D3	18.0	0.43	7.95	0.033	1 063	880 < l_{mix} ≤ 1 187
D5	16.8	0.46	8.32	0.034	1 022	822 < l_{mix} ≤ 1 350
D7	16.0	0.53	9.43	0.035	1 061	746 < l_{mix} ≤ 1 030

3 部分水深平均的二维模型的建立

在传统的全水深平均的二维计算模型中, 浓度的对流扩散方程:

$$\frac{\partial(HC)}{\partial t} + \frac{\partial(HCU)}{\partial x} + \frac{\partial(HCV)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[HE_x \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[HE_y \frac{\partial C}{\partial y} \right] + S_c \quad (14)$$

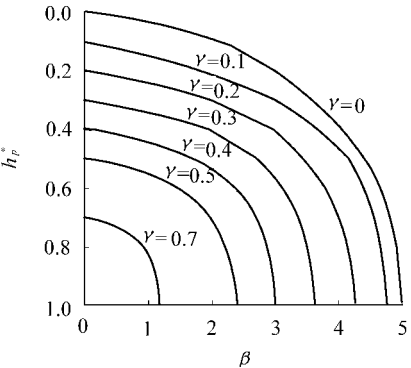


图 2 瞬时源 $h_p^* \sim \beta$ 关系曲线
Fig.2 Relationship of h_p^* and β for instantaneous source

$$H = H$$
$$H = h_p$$

当 $x \geq l_{\text{mix}}$

当 $x < l_{\text{mix}}$

其中 x 为排放口到计算点的距离。

模型的一个基本假定为：污水一出排污口，便在水深方向上均匀混合。在计算排放口近区浓度场时，给出了平均化的稀释特性，而实际浓度在近区垂向上并未达到均匀混合，导致了计算结果中近区污染物浓度值偏小，污染带亦偏小，不利于工程设计。

应用本文上述理论及所建立的相应函数关系式改进传统模型，在模型中引入了垂向均匀混合长度 l_{mix} 和部分均匀混合水深 h_p 两个概念。

以下计算实例为上文所述测验河段，该河段属非稳态强潮汐河段。计算网格在排放点处最密，计算域三边为水边界，一岸为固边界。图 3 示出计算流速值与实测定点流速值符合良好。

在浓度场计算中，采用拉格朗日跟踪质点运动的方法，并用全水深平均模型及部分水深平均模型分别计算两次瞬时源排放过程，验证的浓度场测验资料的编号为 D5 和 D7。这两次实测过程均在大潮落潮流速较稳定时测得。计算中所取参数为：糙率为 0.022，纵向分散系数 $E_x = \alpha_x HU^*$ ，横向混合系数 $E_y = \alpha_y HU^*$ ，其中 $\alpha_x = 6.0, \alpha_y = 0.55$ 。本文在部分水深平均模型中采用 $z_2 = 0.1H$ 的线源，即诺模图 $\gamma = 0.1$ 的曲线，计算中通过输入此曲线，得到任一点的部分混合水深。

两模型计算结果与实测值的比较如图 4 所示，D5 见图 4(a)，D7 见图 4(b)。

图 4 中实测值和计算值为随时间取浓度场中的峰值，在近区范围内，浓度垂向上并未达到均匀混合，其值为部分混合浓度。从图中可以看出，在排放点近距离范围内（小于 1000m），两模型相差较大，且越靠近排放点差别越大，部分水深平均模型计算值与实测值吻合较好，而全水深平均模型计算浓度值比实测值小得多，但远距离处（大于 1500m）三者却相差不大。用部分水深平均模型，解决了全水深平均模型计算点源污染带时，近区浓度场计算值偏小的缺点，因此，部分水深平均模型在近区浓度场计算中具有一定优越性。

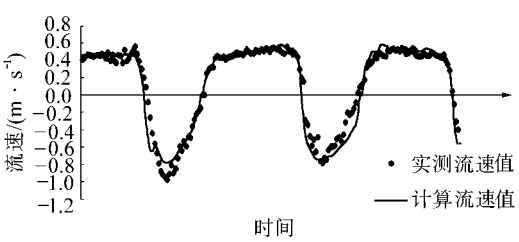


图 3 计算流速过程与实测过程的比较

Fig.3 Comparison between calculated and measured velocity course

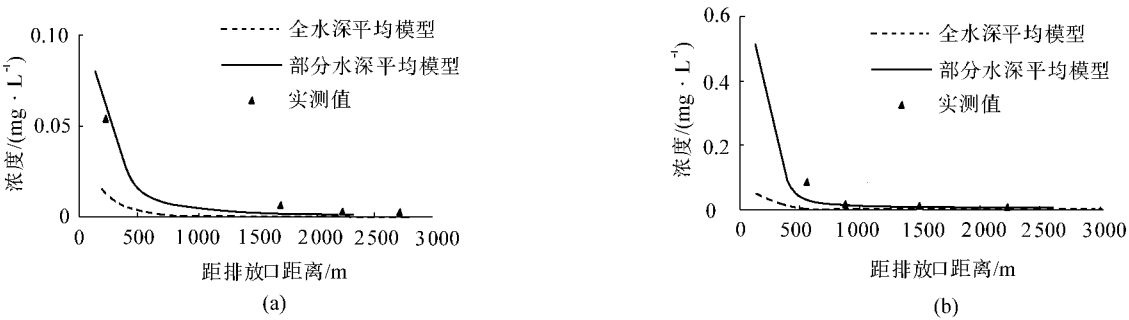


图 4 模型计算值与实测值的比较

Fig.4 Comparison between calculated and measured concentration

4 结 论

通过研究得到：(a)推导建立了瞬时点源垂向均匀混合距离 l_{mix} 及部分均匀混合水深 h_p 的理论关系式；(b)为更好地描述实际排放瞬时源垂向扩散规律，建立了瞬时线源的 h_p 与 x_p 的函数关系；(c)建立了部分水深平均二维计算模型，并把此模型应用于长江河口段罗丹明示踪剂瞬时源排放浓度场的计算中，计算结果与现场跟踪监测资料符合较好；(d)该模型值计算值与全场水深平均的二维模型计算值及实测值进行比较，可以看出，全水深平均模型在距排放口近范围内比实测值小得多，表明该模型在排放点近区范围内具有一定优越性，克服了传统模型的缺陷，取得了较好的结果。

参考文献：

- [1] 张书农.天然河流垂向扩散规律的探索[J].水资源保护,1985(8):18~23.
- [2] Fischer H B,et al. Mixing in inland and coastal waters[M]. San Dalif Academic Press,1979.128.
- [3] 张永良,李玉梁.排污混合区分析计算指南[M].北京 海洋出版社,1993.58.
- [4] 李炜.环境水力学进展[M].武汉 武汉水利电力大学出版社,1999.183.
- [5] Rutherford J C.River mixing[M]. New York John Wiley & Sons Inc, 1994.95~131.
- [6] Lee J H W,Jayawardena A W,Wang Z Y.Proceeding of international conference on environmental hydraulics[M]. Northland Balkman A A,1999.387~392.
- [7] Maurice J C.Tracer tests of eddy diffusion in field and model[J].Hydraulics Division ASCE,1972,98:1737~1752.
- [8] 张书农.环境水力学[M].南京 河海大学出版社,1988.104~108.

A 2D Numerical Model for Part Depth Homogeneous Mixing

DU Yan-liang, CHU Jun-da

(College of Water Resources and Environment, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract :The part depth homogeneous mixing 2D numerical model has been studied on the basis of vertical mixing law of the instantaneous source in natural flow. By theoretical analysis,two equations for the distance of vertical homogeneous mixing and the part depth of homogeneous mixing for the instantaneous point source are presented. Then the relationship between the two varieties for instantaneous linear source is obtained. On the basis of the law,a part depth homogeneous mixing 2D numerical model is developed,which has been used in concentration field calculation. By use of the measured data of Rhodamine – B tracer in the Yangtze river estuary,the comparison of calculated value with measured data is made. The value calculated by the new model approximates to the measured data,and the value calculated by the whole depth mixing 2D model is much smaller than the measured data in the near field. The new model is superior to the conventional 2D model.

Key words :instantaneous source ;distance of vertical homogeneous mixing ;part depth of vertical homogeneous mixing ;2D numerical model