

# 超静定梁的最优塑性设计

唐燮黎, 陆晓敏, 严湘赣

(河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 提出用直接变分方法研究超静定塑性梁的最优设计问题. 数学上它表述为一个具有不等式约束的泛函极值问题. 应用拉格朗日乘子法得到了最优塑性设计的一组必要条件, 并由此导出了最优性条件. 当目标函数是塑性极限弯矩凸函数时, 证明了这一最优性条件也是最优解的充分条件. 基于最优性条件可建立求解最优塑性梁的一般方法. 该方法能普遍适用于各种荷载形式和支承条件.

关键词: 塑性设计; 优化设计; 变分法

中图分类号: TU378.2      文献标识码: A      文章编号: 1000-1980(2001)03-0021-06

一根长  $l$  的超静定梁,  $x$  为沿梁轴线的坐标. 假设梁截面性质由一个沿轴线可变的参数  $\xi(x)$  决定, 则截面的塑性极限弯矩和单位长梁的目标函数(如取材料重量或造价等)分别为

$$M = M(\xi) \tag{1}$$

$$\varphi = \varphi(\xi) \tag{2}$$

由式(1)可解出

$$\xi = \xi(M) \tag{3}$$

因而我们可将一个确定的塑性极限弯矩的函数  $M(x)$  称为梁的一个塑性设计. 把式(3)代入式(2), 并沿梁长积分, 得到结构的目标函数

$$\Phi = \int_0^l \varphi(M) dx \tag{4}$$

假设函数  $\varphi(M)$  为  $M$  的可微函数, 根据其物理含义可合理地假定

$$\dot{\varphi}(M) > 0 \tag{5}$$

一个给定的塑性设计  $M(x)$  称为是安全的, 若可以找到一个静力容许的弯矩分布  $m(x)$ , 使得在梁的任意位置  $x$ , 条件

$$|m(x)| \leq M(x) \tag{6}$$

满足. 根据极限分析的下限定理, 任一安全设计必能承受给定的荷载. 以式(6)为约束条件, 极小化目标函数式(4)通常会得到梁中某些截面尺寸为零的优化解. 当然, 这样的设计不能应用于实际, 但能给出目标值的下界, 也能比较不同截面类型的优化结果, 具有理论价值, 并可供实际设计人员参考.

笔者试图从实际应用出发, 增加一非零最小截面弯矩的约束条件:

$$M(x) \geq M_m \tag{7}$$

式中  $M_m$  是事先选定的截面最小塑性极限弯矩. 应用约束方程式(7)还可保证梁满足其它设计要求, 包括承受剪力的能力.

关于塑性梁的最优设计问题曾有不少学者进行研究. Heyman<sup>[1]</sup>只考虑了  $\varphi = CM$  ( $C$  为大于零的常数)的线性函数形式. Marcal 和 Prager<sup>[2]</sup>, Prager 和 Shield<sup>[3]</sup>依据最小余能原理提出了一个将塑性最优设计转化成一个关联的非线性弹性梁分析问题的求解方法. Rozvany<sup>[4]</sup>推广了 Prager 等人的方法, 写成最优性条件. 对于梁的情形, Rozvany 的最优性条件可表示为

$$k = \begin{cases} 0 & |m| < M_m \\ \varphi(m) & |m| > M_m \\ \mu \varphi(m) & 0 \leq \mu \leq 1 \quad |m| = M_m \end{cases}$$

式中:  $k$ ——与挠度相容的并满足几何边界条件的曲率,称为运动容许曲率;  $m$ ——与荷载平衡并满足力学边界条件的静力容许弯矩;  $M_m$ ——容许的最小塑性极限弯矩;  $\varphi$ ——价值函数。

从 Rozvany 的最优性条件出发,寻找任意静不定梁在任意边界条件和受载条件下的最优塑性解比较困难,也不易得到一个普遍适用的解法。本文用直接变分法,并结合受弯曲梁的静力容许弯矩的特定表达式,在目标函数满足条件式(5)的一般假定下,导出了一个更为直接、便于应用的最优性条件。基于这一条件可以建立求解最优塑性设计的一般方法。当  $\varphi(M)$  是凸函数情形,所得的最优性条件对最优解而言不仅是必要的而且也是充分的。

## 1 最优性的必要性

任意的  $n$  次超静定梁,在集中力、集中力偶和分布力作用下,只要适当选取  $n$  个多余力(或多余力偶)  $R_j$ ,一切静力容许的弯矩分布都可以写为

$$m(x) = \sum_{j=1}^n F_j(x) R_j + G(x) \quad (8)$$

式中  $F_j(x), G(x)$  为具有分段表达式的函数,只取决于梁的受载形式和支承条件,因此是设计的已知函数。如此,梁的最优塑性设计就是要在一切满足最小塑性极限弯矩要求的安全设计中寻求具有最小总目标值的设计,数学上它表述为关于  $M(x)$  和  $R_j$  的一个具有不等式约束的泛函极小值问题:

$$\text{极小化} \quad \Phi = \int_l \varphi(M) dx \quad (9)$$

$$\text{满足} \quad \left( \sum_{j=1}^n F_j(x) R_j + G(x) \right)^2 \leq M^2(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (10)$$

$$\text{和} \quad M_m \leq M(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (11)$$

引进非负松弛函数  $Y(x)$  和  $Z(x)$  后,式(10)和(11)可写成等式约束:

$$\left( \sum_{j=1}^n F_j R_j + G \right)^2 + Y - M^2 = 0 \quad (12)$$

$$\text{和} \quad M_m + Z - M = 0 \quad (13)$$

对约束式(12)和(13)分别引入拉格朗日乘子  $\lambda(x)$  和  $\tau(x)$  后,得到上述泛函极值问题的拉格朗日函数:

$$L = \int_l \{ \varphi(M) + \lambda \left[ \left( \sum_{j=1}^n F_j R_j + G \right)^2 + Y - M^2 \right] + \tau (M_m + Z - M) \} dx \quad (14)$$

拉格朗日函数  $L$  对  $M, Y, Z$  和  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 的变分给出了除约束方程(12)和(13)外的一组极值的必要条件:

$$\dot{\varphi} - 2\lambda M - \tau = 0 \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 0 & Y > 0 \\ \lambda &\geq 0 & Y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau &= 0 & Z > 0 \\ \tau &\geq 0 & Z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\int_l 2\lambda F_i \left( \sum_{j=1}^n F_j R_j + G \right) dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

设  $M(x)$  和  $R_j$  是满足约束方程式(12)和(13)和必要条件式(15)~(18)的安全设计和相应的多余力,那么由式(8)给出的  $m(x)$  就是与  $M(x)$  相关的一个静力容许的弯矩分布。显然在梁内不存在使  $M > |m|$  和  $M > M_m$  同时成立的截面,否则由式(12)和(13)知,在这样的截面处有  $Y > 0$  和  $Z > 0$ ,应用式(16)和(17)就得到  $\lambda = \tau = 0$ ,代入式(15)得  $\dot{\varphi} = 0$ ,与假设条件(5)矛盾。因而整个梁长  $l$  可分为两部分之和,  $l = l_1 + l_2$ , 使在  $l_1$  上有  $M = |m|$  和  $M > M_m$ , 在  $l_2$  上有  $M = M_m$  和  $M \geq |m|$ 。

根据极值条件式(15)~(17)可进一步得到

$$\left. \begin{aligned} \tau &= 0 & \lambda &= \frac{\dot{\varphi}}{2M} & M &= |m| & x &\in l_1 \\ \lambda &= 0 & \tau &= \dot{\varphi} & M &= M_m & x &\in l_2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

利用式(8)和(19),式(18)可改为

$$\int_{l_1} F_i \dot{\varphi} |m| \operatorname{sgn}(m) dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

$$\operatorname{sgn}(m) = \begin{cases} 1 & m > 0 \\ 0 & m = 0 \\ -1 & m < 0 \end{cases} \quad (21)$$

式(20)为最优性条件,将式(18)代入后可得确定多余力  $R_j$  的一组  $n$  个方程.由此解得  $n$  个多余力  $R_j$  后,得到最优塑性设计问题的一个极值解:

$$M(x) = \begin{cases} \left| \sum_{j=1}^n F_j R_j + G \right| & \left| \sum_{j=1}^n F_j R_j + G \right| > M_m \\ M_m & \left| \sum_{j=1}^n F_j R_j + G \right| \leq M_m \end{cases} \quad (22)$$

必须指出,依目标函数  $\Phi(M)$  的具体选取,方程组(20)可允许  $R_j$  有多组解,对  $R_j$  的每一组解,按式(22)都有一个相应的极值设计.由下节充分性的证明可以断言只要  $\Phi(M)$  是  $M$  的凸函数,这些设计都有相同的目标函数值.

## 2 最优性的充分条件

在  $\Phi(M)$  是凸函数的假设下,我们可以证明最优性条件不仅是最优塑性设计的必要条件,而且也是充分条件.设  $R_j$  是方程组(20)的一组解,  $M(x)$  是将解  $R_j$  代入式(22)后得到的设计.又设  $M^*$  和  $R_j^*$  是满足约束

$$M^* \geq \left| \sum F_j R_j^* + G \right| \quad (23)$$

和

$$M^* \geq M_m \quad (24)$$

的任一设计,则两个设计的结构总价值之差为

$$\Phi^* - \Phi = \int_l [\varphi(M^*) - \varphi(M)] dx \quad (25)$$

根据  $\varphi(M)$  是凸函数的假设有

$$\varphi(M^*) - \varphi(M) \geq \dot{\varphi}(M)(M^* - M)$$

将上式代入式(25)的右端,并将整个梁长上的积分写成在  $|m| = \left| \sum F_j R_j + G \right| \leq M_m$ ,  $m \geq M_m$  和  $m \leq -M_m$  三部分上积分之和,于是

$$\begin{aligned} \Phi^* - \Phi &= \int_{|m| \leq M_m} \dot{\varphi}(M)(M^* - M) dx + \int_{m > M_m} \dot{\varphi}(M)(M^* - M) dx + \\ &\quad \int_{m < -M_m} \dot{\varphi}(M)(M^* - M) dx = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \end{aligned} \quad (26)$$

由假设  $\dot{\varphi} > 0$  及式(22)和(24)得

$$\Phi_1 = \int_{|m| < M_m} \dot{\varphi}(M)(M^* - M) dx \geq 0 \quad (27)$$

由假设  $\dot{\varphi} > 0$  及式(22)和(23)得

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \int_{m > M_m} \dot{\varphi}(m)(M^* - m) dx \geq \int_{m > M_m} \dot{\varphi}(m) \left( \sum F_i R_i^* + G - m \right) dx = \\ &\quad \int_{m > M_m} \dot{\varphi}(m) \sum (R_i^* - R_i) F_i dx \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}\Phi_3 = & \int_{m < -M_m} \dot{\varphi}(-m) M^* + m \lambda dx \geq \int_{m < -M_m} \dot{\varphi}(-m) \lambda - \sum F_i R_i^* - G + m \lambda dx = \\ & - \int_{m < -M_m} \dot{\varphi}(-m) \sum (R_i^* - R_i) F_i dx\end{aligned}\quad (29)$$

将式(27)~(29)代入式(26),并用最优性条件式(20)得

$$\begin{aligned}\Phi^* - \Phi \geq & \int_{m > M_m} \dot{\varphi}(m) \sum (R_i^* - R_i) F_i dx - \int_{m < -M_m} \dot{\varphi}(-m) \sum (R_i^* - R_i) F_i dx = \\ & \sum (R_i^* - R_i) \int_{l_1} F_i \dot{\varphi}(|m|) \operatorname{sgn}(m) dx = 0\end{aligned}\quad (30)$$

上式表明当  $\varphi(M)$  是凸函数情形,在一切满足安全条件和最小塑性极限弯矩条件的设计中满足最优性条件式(20)的设计目标函数值最小,因而是最优塑性设计。

### 3 算例

**例1** 梁长  $l$ , 两端固定, 受集度为  $q$  的均布荷载(图1(a)), 设  $\varphi = \gamma M$  ( $\gamma > 0$ , 常数). 由对称性知两端支座反力均为  $\frac{1}{2}ql$ , 取左端弯矩  $R$  为多余力矩, 则静力容许的弯矩分布

$$m(x) = R + \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2 \quad (31)$$

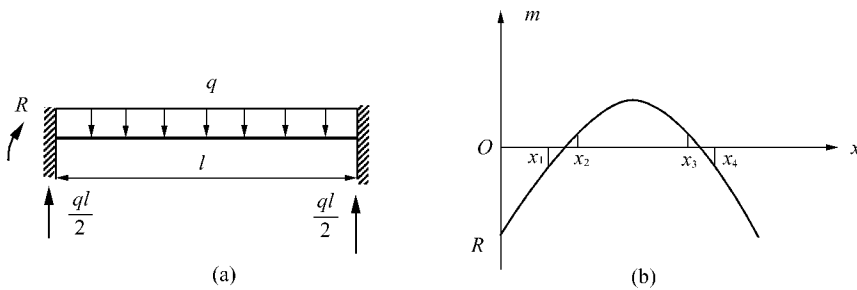


图1 两端固定受均布荷载梁的塑性优化设计

Fig.1 Optimal plastic design of a uniformly distributed beam with two fixed ends

由  $|m(x)| = M_m$  解得

$$\left. \begin{aligned}x_1 &= \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{\lambda(R + M_m)}{q}} & x_2 &= \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{\lambda(R - M_m)}{q}} \\ x_3 &= \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{\lambda(R - M_m)}{q}} & x_4 &= \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{\lambda(R + M_m)}{q}}\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

梁内弯矩分布如图1(b)所示. 对本例, 最优性条件式(20)写为

$$\gamma \int_{l_1} \operatorname{sgn}(m) \lambda dx = 0$$

由图1(b)显见, 完成积分后上式成为

$$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - l = 0$$

将式(32)代入上式, 得到确定  $R$  的方程

$$2\sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{\lambda(R + M_m)}{q}} + 2\sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{\lambda(R - M_m)}{q}} - l = 0 \quad (33)$$

$$\text{解之得} \quad R = 8 \frac{M_m^2}{ql^2} - \frac{3}{32}ql^2 \quad (34)$$

因  $\Phi = \gamma M$  是凸函数, 本问题的最优塑性设计为

$$M(x) = \begin{cases} |R + \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2| & 0 \leq x < x_1, x_2 < x < x_3, x_4 < x \leq l \\ M_m & x_1 \leq x \leq x_2, x_3 \leq x \leq x_4 \end{cases} \quad (35)$$

将式 (34) 代入式 (32) 可求得

$$x_1 = \frac{1}{4} \left( 1 - 16 \frac{M_m}{ql^2} \right) \quad x_2 = \frac{1}{2}l - x_1 \quad x_3 = \frac{l}{2} + x_1 \quad x_4 = l - x_1 \quad (36)$$

目标函数为

$$\Phi = \gamma \int_0^l M dx = \gamma \left( \frac{ql^2}{32} + 8 \frac{M_m^2}{ql} \right) \quad (37)$$

Marcal 和 Prager<sup>[2]</sup>曾用关联的非线性弹性梁方法计算过同样的例子,容易验证,两种方法的结果相同。

例 2 梁长  $l$ , 一端固定, 在距简支端为  $a$  处有一集中力  $P$  作用 (图 2a)。

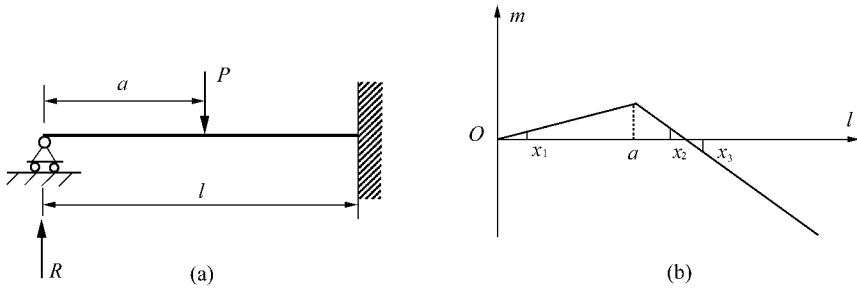


图 2 一端简支一端固定受集中荷载梁的塑性优化设计

Fig.2 Optimal plastic design of a beam subjected to a concentrated load

设目标函数可表为

$$\varphi = \gamma M^\delta \quad (38)$$

其中  $\gamma, \delta$  为大于零的常数. 取简支端支座反力  $R$  为多余力, 静力容许的弯矩分布可写为

$$m(x) = \begin{cases} Rx & 0 \leq x \leq a \\ Rx - P(x - a) & a < x \leq l \end{cases} \quad (39)$$

梁内弯矩分布形式如图 2b 所示. 图中  $x_i (i = 1, 2, 3)$  为弯矩绝对值等于最小容许塑性极限弯矩  $M_m$  的点, 容易得到:

$$x_1 = M_m/R \quad x_2 = (Pa - M_m)/P \quad x_3 = (Pa + M_m)/P \quad (40)$$

将式 (38) 和 (39) 代入式 (20), 写成分段积分得到最优性条件为

$$R^{\delta-1} \int_{x_1}^a x^\delta dx + \int_a^{x_2} x [Rx - P(x - a)]^{\delta-1} dx - \int_{x_3}^l x [P(x - a) - Rx]^{\delta-1} dx = 0$$

上式积分后利用式 (40) 得到确定  $R$  的方程:

$$\delta [(aR)^{1+\delta} - M_m^{1+\delta}] + \frac{\delta R^2}{(P - R)^\delta} [2M_m^{1+\delta} - (aR)^{1+\delta} - (Pl - Pa - lR)^{1+\delta}] + (1 + \delta) \frac{PaR^2}{(P - R)^\delta} [(aR)^\delta - (Pl - Pa - lR)^\delta] = 0 \quad (41)$$

显然多余力  $R$  还必须使不等式  $0 < x_1 < a < x_2 < x_3 < l$  成立, 由式 (40), 要求以下不等式成立:

$$\frac{M_m}{a} < R < \frac{P(l - a) - M_m}{l} \quad (42)$$

因此方程式 (41) 的实根中只有满足式 (42) 的解才对应极值设计, 由式 (22) 和 (39), 极值设计为

$$M(x) = \begin{cases} M_m & x \leq x_1 \\ Rx & x_1 < x \leq a \\ Rx - P(x - a) & a < x \leq x_2 \\ M_m & x_2 < x \leq x_3 \\ -Rx + P(x - a) & x_3 \leq x \leq l \end{cases} \quad (43)$$

将式(43)和(38)代入式(4)可积分出相应的结构目标函数值：

$$\Phi = \frac{\gamma}{(1+\delta)(P-R)} \left\{ \delta M_m^{1+\delta} \frac{P+R}{R} + a^{\delta+1} P R^\delta + (Pl - Pa - lR)^{1+\delta} \right\}$$

(44)

作为数值例子,取  $a=0.6l$ ,  $M_m=0.02Pl$ , 式(38)中的参数  $\delta$  取三种不同数值：

(a)  $\delta=0.5$ , 当梁截面取为等宽高度可变的矩形形状,单位长梁重作为目标函数时属于这一情形.相应的  $\gamma = \rho \frac{6B}{\sigma} l^{\frac{1}{2}}$ , 其中  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $B$  分别为材料的重度,弯曲应力和梁的宽度.

(b)  $\delta=1$ , 当梁截面取为等高宽度可变的矩形形状,单位长梁重作为目标函数时属于这一情形.相应的  $\gamma = \frac{2\rho}{\sigma H}$ , 其中  $\rho$ ,  $\sigma$  的定义如前,  $H$  为梁的高度.

(c)  $\delta=2$ , 将  $a=0.6l$ ,  $M_m=0.02Pl$ ,  $R=\bar{R}P$  代入式(41),得到关于无量纲量  $\bar{R}$  的方程：

$$\delta[(0.6\bar{R})^{1+\delta} - (0.02)^{1+\delta}] + \frac{\delta\bar{R}^2}{(1-\bar{R})^\delta} [(0.02)^{1+\delta} - (0.6\bar{R})^{1+\delta} - (1-0.6-\bar{R})^{1+\delta}] + (1+\delta)\frac{0.6\bar{R}^2}{(1-\bar{R})^\delta} [(0.6\bar{R})^\delta - (1-0.6-\bar{R})^\delta] = 0$$

(45)

令  $\bar{\Phi} = \frac{\Phi}{\gamma P^\delta l^{\delta+1}}$  为无量纲的结构目标函数, 则式(44)写为

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{1+\delta} \frac{1}{(1-R)} \left\{ \delta(0.02)^{1+\delta} \frac{1+\bar{R}}{R} + 0.6^{1+\delta} \bar{R}^\delta + (1-0.6-\bar{R})^{1+\delta} \right\}$$

对给定的  $\delta$ , 用数值方法求解方程式(45)得到  $\bar{R}$ , 代入上式可求得相应的无量纲目标函数. 对应三种情形的解列于表1.

表 1 例 2 问题的最优塑性设计  
Table 1 Optimal plastic design  
for the second example

| 情形 | $\delta$ | $\bar{R}$ | $\bar{\Phi}$ |
|----|----------|-----------|--------------|
| a  | 0.5      | 0.054 915 | 0.238 987    |
| b  | 1        | 0.157 743 | 0.070 294    |
| c  | 2        | 0.208 159 | 0.006 951    |

4 结 语

用本文方法对塑性梁进行优化设计归结为求解最优性条件方程式(20). 算例表明, 用这一方法求解不涉及相容性的曲率分布, 因而较之现有的一些方法更为简便、有效.

在方程式(20)左端不能给出有限形式的积分时, 可用数值积分法求解该方程组. 对于多次超静定问题, 求解时无原则困难.

参考文献：

[1] Heyman J. On the absolute minimum weight design of framed structures[J]. Quart J Mech and Applied meth, 1959, 13(3): 314~324.

[2] Marcal P V, Prager W. A method of optimal plastic design[J]. J De Mechanique, 1964, 3(4): 509~530.

[3] Prager W, Shield R T. A general theory of optimal plastic design[J]. J Applied Mech, 1967, 34(1): 184~186.

[4] Rozvany G I N. Optimal design of flexural systems[M]. Pergamon, Oxford, 1976.

Optimal Plastic Design of Statically Indeterminate Beams

TANG Xie-li, LU Xiao-min, YAN Xiang-gan

( College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China )

**Abstract** A method of direct variation is presented for the investigation of the optimal design of statically indeterminate plastic beams in this paper. Mathematically it is formulated as a functional extreme problem with inequality constraints. The necessary conditions for the optimal plastic design are obtained by means of the Lagrange multiplier method and then the optimality conditions are derived. It is proved that the optimality conditions are also sufficient if the objective function is a convex function of the plastic limit bending moment. A universal method for finding optimal plastic beams can be developed based on the optimality conditions. The method proposed in the paper is applicable to any kind of loadings and support conditions.

**Key words** plastic design; optimal design; variation calculus