

求解约束非线性优化问题的群体复合形进化算法

王建群 卢志华 哈布哈琪

(淮海大学水文水资源及环境学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :分析了 SCE-UA 算法的特性 ,指出该算法仍存在着一些缺陷 .例如(1)SCE-UA 算法的全局最优性依赖于随机选取的初始点集的多样性 ,若初始点集选取不当 ,搜索进化就会早熟而陷入局部最优解 ;(2)SCE-UA 算法求解具有区间约束的非线性约束优化问题较有效 ,但对于一般的不等式约束非线性优化问题其求解效率有待于进一步提高 .提出了群体复合形进化算法 ,能充分利用目标函数值的信息 ,优化搜索过程具有较强的方向性和目标性 ,收敛速度较快 ,且是全局优化算法 ,能有效地求解不等式约束非线性优化问题 .

关键词 :非线性优化 ;进化算法 ;复合形算法 ;全局优化算法

中图分类号 :O221.2 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2001)03-0046-05

优化在很多领域中都是一种基本工具 ,而约束非线性优化问题普遍存在 ,尤其在水资源开发利用领域内很多问题都可概化为约束非线性优化问题 .例如 ,概念性降雨径流模型参数的自动率定、水库优化调度、水资源优化配置等 .约束非线性优化问题可以概化为

$$\min f(x) \quad \text{s.t.} \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

实际优化问题中出现的函数 $f(x)$, $g_i(x)$ 常常高度非线性和 $f(x)$ 具有多峰谷性、不可微性 ,且没有具体的表达式 ,只能求出在一些具体点上的函数值 .求解这类问题的优化方法一般有随机试验法、复合形法、基因算法^[1]等直接优化方法 .

随机试验点法能够求得全局最优解 ,但没有充分利用函数值信息 ,计算量较大 ,求解效率较低 .复合形法在优化求解过程中能充分利用目标函数信息 ,求解效率大大提高 .但复合形法是局部优化方法 ,对于存在多个极值点的优化问题难以求得全局最优解 .近年来 ,基因算法成为人们研究的热点 .基因算法具有数据处理方式简单、没有可微性要求、在一定程度上利用了函数值的信息进行优化迭代等优异特性 .但基因算法还存在着计算效率低、早熟而陷入局部极值点、难以处理一般的不等式约束等问题^[2] .

1993 年 Duan 等人在求解概念性降雨径流模型参数自动率定的优化问题时 ,针对问题的非线性、多极值、没有具体的函数表达式、区间型约束等特点 ,提出了 SCE-UA 方法^[3] .该算法在 Nelder 和 Mead^[1965] 的复合形直接算法的基础上 ,由自然界中的生物竞争进化原理^[Holland,1975] 或基因算法的基本原理等概念综合而成 ,是一种有效地解决非线性约束最优化问题的方法 ,可以找到全局最优解 .但是 ,SCE-UA 算法的全局最优性依赖于随机选取的初始点集的多样性 .若初始点集选取不当 ,搜索进化就会早熟而陷入局部最优解 .此外该方法对求解具有区间约束的非线性约束优化问题较有效 ,对于一般的不等式约束非线性优化问题还有待于进一步研究 ,其求解效率还有待于进一步提高 .本文的主要目的是在分析 SCE-UA 算法的基础上 ,提出群体复合形进化算法 .提出的群体复合形进化算法能充分利用目标函数值的信息 ,优化搜索过程具有较强的方向性和目标性 ,收敛速度较快 ,且是全局优化算法 ,能有效地求解不等式约束非线性优化问题 .

1 SCE-UA 算法

SCE-UA(Shuffled Complex Evolution-University of Arizona)算法的基本思路主要基于确定性的 Nelder 和 Mead

复合形搜索技术和自然界中的生物竞争进化原理相结合的概念.使用 SCE-UA 解最小化问题步骤如下.

a. 初始化 假定是 n 维问题,选取参与进化的复合形的个数 p ($p \geq 1$) 和每个复合形所包含的顶点数目 m ($m \geq n + 1$). 计算样本点数目 $s = pm$.

b. 产生样本点 在可行域内随机产生 s 个样本点 $x_1, \dots, x_s$, 分别计算每一点 x_i 的函数值 $f_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, s$.

c. 样本点排序 把 s 个样本点 (x_i, f_i) 按照函数值的升序排列,排序后不妨仍记为 (x_i, f_i) , $i = 1, \dots, s$, 其中 $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_s$, 记 $D = \{(x_i, f_i) | i = 1, \dots, s\}$.

d. 划分为复合形群体 将 D 划分为 p 个复合形 $A^1, \dots, A^p$, 每个复合形含有 m 点, 其中

$$A^k = \{(x_j^k, f_j^k) | x_j^k = x_{j+(k-1)m}, f_j^k = f_{j+(k-1)m}, j = 1, \dots, m\}, k = 1, 2, \dots, p$$

e. 复合形进化 按照竞争的复合形进化算法(CCE)分别进化每个复合形.

f. 复合形掺混 把进化后的每个复合形的所有顶点组合成新的点集,再次按照函数值的升序排列,排序后不妨仍记为 D .

g. 收敛性判断 如果满足收敛条件则停止,否则回到 d. 步.

其中竞争的复合形进化算法(CCE)的具体步骤为:

a. 初始化 选取 q, α 和 β , 这里 $2 \leq q \leq m, \alpha \geq 1, \beta \geq 1$.

$$p_i = \frac{\alpha(m+1-i)}{m(m+1)} \quad i = 1, \dots, m$$

b. 分配权重 对第 A^k 个复合形中的每个点分配其概率质量,这样较好的点就要比稍差的点有较多的机会形成子复合形.

c. 选取父辈群体 从 A^k 中按照概率质量分布随机地选取 q 个不同的点 $u_1, \dots, u_q$, 并记录 q 个点在 A^k 中的位置 L . 计算每个点的函数值 v_j , 把 q 个点及其相应的函数值放于变量 B 中.

d. 进化产生下一代群体

(a) 对 q 个点以函数值的升序排列,计算 $q-1$ 个点的形心:

$$g = \frac{1}{q-1} \sum_{j=1}^{q-1} u_j$$

(b) 计算最差点的反射点 $r = 2g - u_q$.

(c) 如果 r 在可行域内,计算其函数值 f_r , 转到(d)步. 否则,计算包含 A^k 的可行域中的最小超平面 H , 从 H 中随机抽取一可行点 Z , 计算 f_z , 以 z 代替 r , f_z 代替 f_r .

(d) 若 $f_r < f_q$, 以 r 代替最差点 u_q , 转到(f)步; 否则计算 $c = (g + u_q)/2$ 和 f_c .

(e) 若 $f_c < f_q$, 以 c 代替最差点 u_q , 转到(f)步; 否则,计算包含 A^k 的可行域中的最小超平面 H , 从 H 中随机抽取一可行点 Z , 计算 f_z , 以 z 代替 u_q , f_z 代替 f_q .

(f) 重复步骤(a)到步骤(e) α 次.

e. 取代 把 B 中进化产生的下一代群体即 q 个点放回到 A^k 中原位置 L , 并重新排序.

f. 迭代 重复步骤 a. 到步骤 e. β 次, 它表示进化了 β 代, 也即每个复合形进化了多远.

SCE-UA 算法建议取 $m = (2n + 1)$, $q = n + 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2n + 1$.

Duan 等人使用 SCE-UA 算法,成功地解决了概念性降雨径流模型参数的自动优化率定问题^[4], 该问题实际上是一个具有区间约束的非线性优化问题.

从 SCE-UA 算法的具体步骤可以看出, SCE-UA 算法的本质是从可行域中随机选取一初始点集, 把这些点分成若干个复合形, 每个复合形包含若干个点, 每个复合形分别朝着自己最优方向搜索进化到某一程度, 然后把所有的点掺混并重新分配, 以保证信息的交流. 重复搜索进化过程, 如果初始点集足够大, 那么整个点集就会逐渐向全局最优点收敛. 由此可见, SCE-UA 算法的全局最优性依赖于初始点集的多样性. 若初始点集选取不当, 搜索进化就会早熟而陷入局部最优解. 此外该方法对求解具有区间约束的非线性约束优化问题较有效, 对于一般的不等式约束非线性优化问题, 由于“从包含给定复合形的可行域中的最小超平面 H 上随机抽取一可行点^[5]”这一算法的复杂性, 还有待于进一步研究. 在 SCE-UA 算法中, “复合形分别进化”和“复合形相互掺混”可以保证进化信息的交流, 但也降低了复合形搜索的效率. 鉴于以上几点分析, 提出群体复合形

进化算法.

2 群体复合形进化算法

提出的群体复合形进化算法的基本思路是,从可行域中随机选取一初始点集,把这些点分给若干个复合形,每个复合形包含若干个点,每个复合形个体分别朝自己最优方向在可行域内搜索进化到收敛,即复合形的半径充分小,然后从收敛的每个复合形中取出一个最优点,再从可行域中随机选取一点集替换其余的点,将这两部分点掺混并重新分配,得到新一代复合形群体.重复这一进化过程,直至收敛到全局最优点.具体算法如下:

a. 初始化 假定是 n 维问题,选取参与进化的复合形的个数 p ($p \geq 1$) 和每个复合形所包含的顶点数目 m ($m = 2n + 1$). 计算样本点数目 $s = pm$.

b. 产生样本点 在可行域内随机产生 s 个样本点 $x_1, \dots, x_s$, 分别计算每一点 x_i 的函数值 $f_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, s$.

c. 样本点排序 把 s 个样本点 (x_i, f_i) , $i = 1, \dots, s$ 按照函数值的升序排列,排序后不妨仍记为 (x_i, f_i) , $i = 1, \dots, s$, 其中 $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_s$. 记 $D = \{(x_i, f_i) | i = 1, \dots, s\}$.

d. 划分为复合形群体 将 D 划分为 p 个复合形 $A^1, \dots, A^p$, 每个复合形含有 m 个点. 其中

$$A^k = \{(x_j^k, f_j^k) | x_j^k = x_{j+(k-1)m}, f_j^k = f_{j+(k-1)m}, j = 1, \dots, m, k = 1, 2, \dots, p\}$$

e. 复合形个体进化 按复合形个体进化算法分别进化每个复合形,直至每个复合形收敛.

f. 收敛性判断 如果复合形群体满足收敛条件则停止,否则进行 g. 步.

g. 复合形群体进化 从收敛的每个复合形中分别取出一个最优点,记为 $x_1, x_2, \dots, x_p$, 再从可行域中随机选取 $s - p$ 个点. 将这两部分点掺混杂交形成新的点集,再按照函数值的升序排列,排序后不妨仍记为 D , 回到第 d. 步.

复合形个体进化算法就是经典的求解凸不等式约束非线性规划的复合形法,其具体步骤为:

a. 初始化 选取 $\alpha = 1.3$, $\beta = 0.8$, $\delta = -0.5$, $\eta_0 = 0.9$, $r = 2n$ 和收敛控制常数 ε . 在可行域内随机产生 r 个样本点 $x_1, \dots, x_r$.

b. 求出复合形的最好点 x_g 、最坏点 x_b 、重心 x_e 和半径 d .

c. 收敛性判断 若 $d \leq \varepsilon$, 则停, 否则做 d. 步.

d. 反射 $x^0 = (1 + \alpha)x_e - \alpha x_b$, $f(x^0) = f^0$, 若反射成功即 $f^0 < f(x_b)$ 则做 e. 步, 否则做 f. 步.

e. 可行性检验 若 $g(x^0) \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, 即 x^0 可行则 $x_b := x^0$ 转 b. 步, 否则 $k := 0$, $\eta = \eta_0$ 做 (a).

(a) 求 $x = (1 - \eta)x_e + \eta x^0$, 若 x 可行, 则做 (b), 否则做 (c).

(b) 求 $f(x)$, 若 $f(x) < f(x_b)$ 则 $x_b := x$ 转 b. 步, 否则做 f. 步.

(c) $\eta := \eta \cdot \eta$, $k := k + 1$, 若 k 大于预先给定的充分大的常数 N 则转 f. 步, 否则转 (a).

f. 收缩 求 $x^{00} = (1 + \delta)x_e - \delta x_b$, $f^{00} = f(x^{00})$, 若收缩成功即 $f^{00} < f(x)$ 则 $x_b := x^{00}$ 转 b. 步, 否则做 g. 步.

g. 压缩 $x_k := (1 - \beta)x_k + \beta x_g$, $k = 1, 2, \dots, r$. 转 b. 步.

群体复合形进化算法的收敛性判断方法 按复合形个体进化算法分别进化每个复合形直至每个复合形收敛后得到的 s 个样本点 (x_i^k, f_i^k) , $i = 1, \dots, s$ 按照函数值的升序排列,排序后不妨仍记为 (x_i^k, f_i^k) , $i = 1, \dots, s$, 其中 $f_1^k \leq f_2^k \leq \dots \leq f_s^k$, 上标 k 表示第 k 次迭代, $k = 1, 2, \dots$. 建议采用收敛性判别准则: $|f_i^{k-3} - f_i^k| / \sigma \leq \varepsilon$, $k \geq 4$, 其中 $\sigma \geq 0$ 为目标函数值的尺度常数, $\varepsilon \geq 0$ 为收敛性控制常数.

群体复合形进化算法具有以下特点:

a. 能求解一般的不等式约束非线性优化问题, 包括区间约束非线性优化问题.

b. 复合形个体进化采用了经典的求解凸不等式约束非线性规划的复合形法, 因此具有能充分利用目标函数值的信息、搜索效率较高等经典的复合形法所具有的优点, 比一般的基因算法具有较强的方向性和目标性, 进化过程不会停滞, 加快了收敛速度.

c. 复合形群体进化是从复合形个体进化收敛的每个复合形中仅取出一个最优点, 再从可行域中随机选

取若干个点与之掺混杂交形成新一代复合形群体.这一途径得到的新一代复合形群体既保留了复合形个体进化收敛求得的局部最优点的优良性、淘汰了局部最优解的重复信息,又增加了较多的新的函数值信息.因此复合形群体进化能很快收敛到全局最优解.

3 仿 真 试 验

为了检验群体复合形进化算法的优化效果和效率,选用了 3 个具有代表性的测试函数,如下:

(a) $F_1=(4-2.1x^2+x^4/3)x^2+xy+(-4+4y^2)y^2$ ($-10 < x < 10,-10 < y < 10$)
 F_1 有 6 个局部极小点,全局极小点为 $(-0.0898,0.7126)$ 和 $(0.0898,-0.7126)$,最小值为 -1.031628 .

(b) $F_2=(x^2+y^2)/2-\cos(2\pi x)\cos(2\pi y)$ ($-10 < x < 10,-10 < y < 10$)
 F_2 具有众多的局部极小点,全局极小点为 $(0,0)$,最小值为 -1 .

(c) $\min F_3=-(2x+y)$ s. t. $x^2-6x+y\leq 0$ $x^2+y^2-80\leq 0$ $x\geq 3,y\geq 0$
问题(c)的理论最优解为 $x=4,y=8$,最优值为 -16 .

采用群体复合形进化算法求解以上 3 个优化问题的优化结果如表 1、采用经典的复合形算法求解以上 3 个优化问题的优化结果如表 2、采用 SCE-UA 算法求解以上 3 个优化问题的优化结果如表 3.由表 2 可以看出,经典的复合形算法对单峰函数 F_3 能求出最优解,对具有多个极值点的多峰函数一般不能求出全局最优解.由表 3 可以看出,SCE-UA 对于多峰函数,有时能求出全局最优解(例如对于 F_2),有时却不能(例如对于 F_1).由表 1、表 2、表 3 可以看出,群体复合形进化迭代收敛的速度较快,能求出全局最优解,能求出具有同一最小值的多个最小值点,能求解一般的不等式约束非线性最优化问题.

表 1 群体复合形进化算法的优化结果

试验函数	最小值	最小值点		精度控制 常数 $\times 10^{-20}$	迭代次数
		x	y		
F_1	-1.031628	8.984651×10^{-2}	-7.126119×10^{-1}	1.0	7
F_1	-1.031628	-8.986170×10^{-2}	7.126238×10^{-1}	1.0	7
F_2	-1.000000	1.947211×10^{-5}	2.774781×10^{-5}	1.0	7
F_3	-16.000000	4.0005480	7.9989040	1.0	4

表 2 复合形算法的优化结果

试验函数	最小值	最小值点		精度控制 常数 $\times 10^{-20}$	迭代次数
		x	y		
F_1	-0.126060	-0.4971450	0.497145	1.0	1000
F_2	-0.644533	-0.0992217	0.100763	1.0	1000
F_3	-15.999900	4.0305700	7.937920	1.0	1000

表 3 SCE-UA 算法的优化结果

试验函数	最小值	最小值点		精度控制 常数 $\times 10^{-20}$	迭代次数
		x	y		
F_1	-0.000102	-1.479651×10^{-5}	2.78979×10^{-4}	1.0	1000
F_2	-0.999901	-1.546834×10^{-5}	3.034522×10^{-5}	1.0	1000

4 结 语

描述了 SCE-UA 算法的基本概念、原理和方法,在分析了 SCE-UA 算法的基础上,提出了群体复合形进化算法.提出的群体复合形进化算法能充分利用目标函数值的信息,优化搜索过程具有较强的方向性和目标性,收敛速度较快,且是全局优化算法,能有效地求解不等式约束非线性优化问题.不仅如此,此种算法简单,易于掌握,通用性好.对于实际应用中尤其在水资源开发利用领域内存在的具有高度非线性、多极值点、不可微性、没有具体的目标函数表达式等特征的约束非线性优化问题,群体复合形进化算法是较有效的方法.

参考文献：

- [1] Michalewicz Z. Genetic algorithms + data structures = evolution programs[M]. New York :Springer ,1996.24 ~ 35.
- [2] Wang Q J.The genetic algorithm and its application to calibrating conceptual rainfall-runoff models[J]. Water Resources Research ,1991 , 12(9) : 2467 ~ 2471.
- [3] Duan Q ,Gupta V K ,Sorooshian S. A shuffled complex evolution approach for effective and efficient global minimization[J]. Journal of Optimization theory and Applications ,1993 ,76(3) :501 ~ 521.
- [4] Duan Q , Sorooshian S ,Gupta V K.Optimal use of SCE-UA global optimization method for calibrating watershed models[J]. Journal of Hydrology ,1994 ,158 :265 ~ 284.
- [5] Fryer M J ,Greenman J V.Optimization theory[M]. New York :Edward Arnold Pty Ltd ,1987.130 ~ 150.

Multi-Complex Evolution Algorithm for Constraint Nonlinear Optimization Problems

WANG Jian-qun ,LU Zhi-hua ,Hapuarachchi H A P

(College of Water Resources and Environment , Hohai University ,Nanjing 210098 ,China)

Abstract :The essential concepts and the characters of the SCE-UA method are reviewed , and some limitations of the SCE-UA method are pointed out , such as (1) the global optimum of the method depends on the variety of the initial point sets , if the initial point sets can not be selected properly , the global optimum can not be obtained (2) the general inequality constraint nonlinear optimization problems can not be solved effectively. In this paper , a more effective method called Multi-Complex Evolution Algorithm for Constraint Nonlinear Optimization Problems is presented. This new method can use the information of the objective function to search for the optimum objectively. This new method is a global optimization method ,which can be used for general inequality constraint nonlinear optimization problems efficiently and effectively.

Key words :nonlinear optimization ;evolution algorithm ;complex algorithm ;global optimization method