

高 Re 数下 N-S 方程有限元数值解法研究

郭新贵¹,倪福生²,洪锡军¹,胡沛成²

(1.上海交通大学塑性成形工程系,上海 200030 2.河海大学机电工程学院,江苏 常州 213022)

摘要:采用原参数形式 N-S 方程直接解法,研究高 Re 数下 N-S 方程数值解法.波阵技术可节省内存,提高计算效率;混合插值函数可避免求解过程中的压力振荡;时间推进解法和简化迎风有限元技术可防止解的非物理振荡;低雷诺数的收敛解作为高雷诺数的初场,定常解作为非定常解初场,可提高解稳定性,加快收敛速度.最后以驱动方腔为计算实例,对解法进行了验证,得到的结果与经典结果吻合较好,为高 Re 数下 N-S 方程的数值解提供了参考.

关键词:N-S 方程;高 Re 数;Galerkin 有限元;时间推进法

中图分类号:TV143.1 文献标识码:A 文章编号:1000-1980(2001)03-0065-04

N-S 方程的数值求解一直是流体力学的首要难题.特别是在高 Re 数条件下,方程中粘性项作用减弱,椭圆方程退化为双曲方程,难以得到稳定解.本文采用原参数形式的 N-S 方程的直接解法,对高 Re 数下 N-S 方程数值解法进行了研究.在直接解法中,散度条件作为压力方程给出,动量方程与压力方程同步求解,避免了动量方程与压力方程迭代求解,从而使计算程式得到简化^[1].最后采用 Galerkin 有限元迭代解法和时间推进解法,对高 Re 数下驱动方腔内剪切流动进行数值模拟,得到了较好的结果,为高 Re 数下 N-S 方程的数值解提供了参考.

1 控制方程及其离散

1.1 控制方程

采用原参数形式 N-S 方程进行求解,通过引入特征速度和特征长度,进行无量纲化,得到非定常方程形式:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

在上述方程中,场量 $u_i = u_i(x_j, t)$ 是时间和空间的函数.经过一定时间,场量(u_i)趋于稳定,不再随时间发生变化时,方程就退化为定常形式:

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2}$$

该方程中 $u_i = u_i(x_j)$ 仅是空间的函数.

以上述原理为基础,我们通过时间推进解法,采用非定常形式的方程求解定常问题,这对高 Re 数下 N-S 方程的求解是很有意义的.当 Re 数较小时,定常形式的 N-S 方程求解比较方便,但当 Re 数增大时,方程的求解性能越来越差,而非定常 N-S 方程在高 Re 数下稳定性较好,这时就可以采用非定常解逼近定常解.本文即采用这种思想对高 Re 数下 N-S 方程求解.

1.2 方程的离散

采用 Galerkin 有限元方法对方程进行离散.对速度场采用 8 节点二次等参数单元,压力场采用 4 节点线性单元:

收稿日期 2000-05-10
作者简介:郭新贵(1973—),男,湖北公安人,博士研究生,主要研究方向为 CAD.

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_i \quad v = \sum_{j=1}^8 N_j(\xi, \eta) v_j \quad p = \sum_{k=1}^4 M_k(\xi, \eta) p_k \quad (3)$$

文献[2]提出了这种混合单元插值的方法,该方法的作用类似于交错网格,可以抑制求解过程中的压力震荡。

将式(3)代入 N-S 方程组(1)(2),对各单元进行 Galerkin 积分,对非定常项采用三层隐格式时间差分离散,以提高求解过程的稳定性^[3],最后得到统一形式代数方程组:

$$A\Phi^{n+1} = C$$

式中: A ——系数矩阵; Φ^{n+1} ——第 $n+1$ 次迭代的场量值; C ——包括时间项和体积力。

2 方程的求解

2.1 波阵解法

采用原参数形式 N-S 方程耦合直接解法求解速度场、压力场,压力和速度同时解出,不需求解压力泊松方程,求解方便,但这也带来了一个问题,就是求解方程繁多,这样刚度矩阵势必十分庞大,需要很大的内存空间来存放,并且在消元过程中元素的寻址运算也会花掉很多时间,这样就大大地降低了计算效率。通过分析可以发现,刚度矩阵是一个稀疏矩阵,因此我们引入波阵解法求解代数方程组^[4]。实践证明,波阵法对节省内存和提高计算效率是十分有效的。

2.2 非定常解逼近定常解

在应用定常 N-S 方程求解时发现,当雷诺数增大到一定值时,解开始振荡。为此,在高雷诺数下采用非定常 N-S 方程求解,用非定常解逐步逼近定常解。在非定常 N-S 方程求解时首先遇到的问题是初场的选取问题,初场选取不当,将直接导致求解效率降低甚至不收敛。我们在求解过程中发现,采用较低雷诺数下定常解作为初场可以大大提高解的收敛速度。因此,我们在求解高 Re 数下的 N-S 方程时,先用定常 N-S 方程在较低雷诺数下求解,待基本稳定后,将其结果输出作为高雷诺数下非定常 N-S 方程的初场。

2.3 简化迎风有限元技术

为避免解的非物理振荡和发散,采用简化迎风有限元技术(SUPG)处理对流项,其基本思想是仍然使用 Galerkin 方法中的基函数作为权函数,所不同的是对流项采用数值积分。为反映格式的迎风特点,积分基点取在偏离中心的某一位置,偏离程度取决于迎风强度的大小^[5]。

3 计算实例

采用上述算法,对驱动方腔内剪切流动问题进行了计算。驱动方腔内剪切流动是粘性流动计算方法常用的考核算例。其边界条件如图 1 所示。严格地讲,驱动方腔上盖与静止固壁的交点是奇点,为在计算过程中避免出现奇点,简化计算程序,我们在壁角上给定滑动边界条件,壁角处速度取上盖速度 $u = U_{up}$ 。压力参考点取在空腔底部中点,腔内计算单元按 10×10 均匀分布(图 1)。流动雷诺数 $Re = U_{up}L/\nu$,其中 U_{up} 为方腔上盖速度,取为特征速度, L 为方腔的边长,取为特征长度。

3.1 较低 Re 数的定常解

首先我们采用定常解法进行求解,目的是了解 Re 数的变化对解的稳定性的影响,同时也为后面非定常解提供初场。计算结果如图 2 3。

图 2 是迭代收敛过程,从图中可以看出在雷诺数较小时($Re < 3000$),迭代解收敛很快,收敛过程稳定,当 Re 数增加到一定程度以后,解产生大幅度振荡(如图 2 中 $Re = 3000$ 的情形),得不到收敛解。原因是当 Re 数增加到一定程度后方程(3)中粘性项的影响减弱到可以忽略不计,椭圆方程退化为双曲方程,在高 Re 数下方程难解,这就是我们在后面采用非定常解逼近定常解的原因。

图 3(a)(b)分别是 $Re = 400$, $Re = 1000$ 时方腔中心线上的速度曲线(图中 U, V 为水平速度 u , 垂直速度 v 的无量纲表示),与经典结果^[6]比较吻合很好,随 Re 数的增加误差略有增大,原因是随 Re 数的增加,网格雷诺数增大,稳定性减弱,引起误差增大。

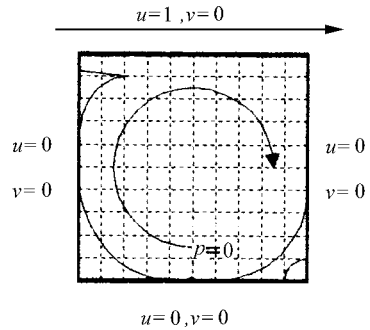


图 1 驱动方腔边界条件
Fig.1 Boundary conditions of square cavity

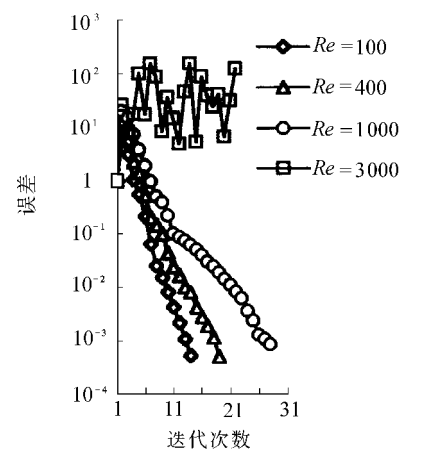


图 2 迭代收敛过程

Fig.2 Iteration convergence process

3.2 高 Re 数的非定常解

由于定常 N-S 方程在高雷诺数下解不收敛, 我们使用非定常的 N-S 方程通过时间推进逼近定常解. 在非定常流动情况下分别计算了 $Re = 1000$ 5000 的两种情况. 时间步长为 $\tau = 0.01$, 迭代收敛精度取为 $\epsilon = 0.01$. 为了节省计算时间, 加快收敛速度, 在 $Re = 1000$ 时, 我们用定常流动计算的收敛解作为计算初场, $Re = 5000$ 时, 用 $Re = 1000$ 时的收敛解作为计算初场. 计算结果如图 4~6 所示.

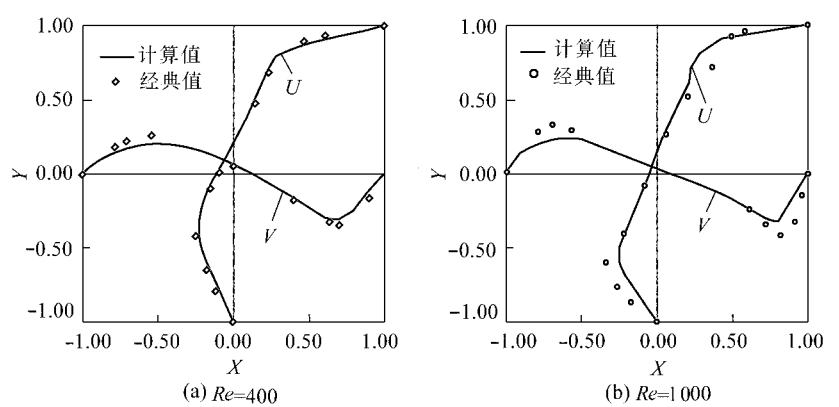


图 3 定常解方腔中心线速度分布

Fig.3 Steady flow velocity distribution at center line of square cavity

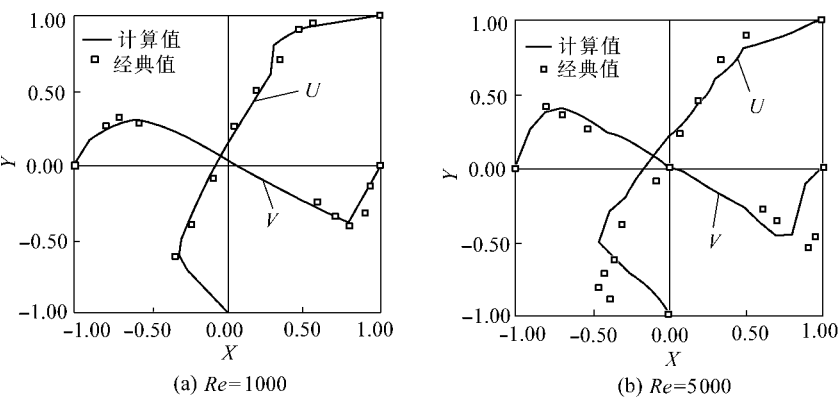


图 4 非定常解方腔中心线速度分布

Fig.4 Unsteady flow velocity distribution at center line of square cavity



图 5 流线分布

Fig.5 Streamline distribution

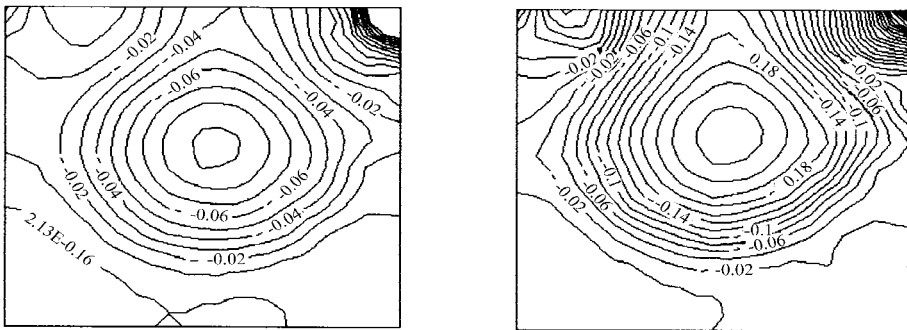


图 6 压力分布

驱动方腔中心线速度分布曲线如图4所示.与经典结果^[6]比较, $Re = 1000$ 时符合很好, $Re = 5000$ 时有一些偏差,主要反映在计算峰值点偏向方腔中心.分析其原因,可能有两个方面:(a)网格分布不太合理,单元划分比较粗糙,对高雷诺数流动的壁面附近的变化不适应.如果将网格划分得再细一点,壁面处布置密一点,结果就好一些.(b)采用了简化的迎风格式,给计算结果带来误差.总体说来,计算结果基本上反映了方腔内的剪切流动情况.

图5(a)(b)是 Re 分别为1000,5000时的流线分布图.从图中可以看出,在 $Re = 1000, 5000$ 时方腔的壁角上出现了二次涡,并且随着雷诺数的增加,上游二次涡减小而下游二次涡增大,流线更加密集,主涡更加充满空腔,计算结果与文献[6]的结果是一致的.图6是对应的压力分布图,图中壁角奇点处压力线密集,随 Re 数增加,方腔由内向外产生压力梯度,等压线中心与主涡中心一致,主涡中心为压力最低点.与流线分布图一致,随着雷诺数的增加,方腔内压力梯度增加,空腔中心的压力减小,主涡的旋涡强度增强,使得主涡向方腔中心移动,更加充满空腔.

通过比较定常和非定常的计算结果(图3(b)与图4(a)),可以看出在 $Re = 1000$ 时定常与非定常两种方法均能得到计算结果,但用非定常逼近定常解得到的计算结果明显优于定常解的结果,在 $Re = 5000$ 时定常得不到收敛解,而非定常方法可以得到收敛解.由此可以说明,在 Re 数较高的情况下适宜用非定常逼近定常解.

4 结 论

(a)原参数形式的N-S方程耦合直接解法求解速度场和压力场,不求解压力泊松方程,求解直观、方便;同时采用波阵技术减少了内存开销,提高了计算效率.(b)采用混合插值函数和简化迎风有限元技术,抑制了解的非物理振荡,提高了解的稳定性.(c)采用低雷诺数的收敛解作为高雷诺数的初场,定常解作为非定常解初场,提高了解的稳定性,加快了收敛速度.(d)以驱动方腔为计算实例,采用时间推进解法,用非定常解逼近定常解,得到了高雷诺数下N-S方程稳定解,与经典结果比较吻合较好.

参考文献:

- [1] Taylor C, Hughes T G, Morgan K. Analysis of turbulent flow in pipes[J]. Computer and Fluid, 1977 (5): 191 ~ 204.
- [2] Taylor C, Hood P. A numerical solution of the navier-stokes equations using the finite technique[J]. Comput Fluids, 1973 (1): 73 ~ 100.
- [3] Peyret R, Taylor T D. Computational for fluid flow[M]. Springer Series in Computational Physics, 1983. 213 ~ 245.
- [4] 刘万勋, 刘长学, 华伯浩, 等. 大型稀疏线性方程组的解法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1981. 134 ~ 148.
- [5] Thomas J R, Hughes. A simple scheme for developing 'Upwind' finite element[J]. Int Jou for Num Meth in Eng, 1978, 12: 1359 ~ 1365.
- [6] Ghia K N, Ghia N. Multigrid technique for the solution of incompressible navier-stokes equations[J]. Comput Fluids, 1985, 13(3): 121 ~ 153.

A Study of FEM Numerical Solutions to N-S Equations under High Renolds Number

GUO Xin-gui¹, NI Fu-sheng², HONG Xi-jun¹, HU Pei-cheng²

(1. Dept. of Plastic Tech., Shanghai Jiaotong Univ., Shanghai 200030, China;

2. College of Mechanical and Electric Engineering Hohai Univ., Changzhou 213002, China)

Abstract The primitive-variable Navier-Stokes equations are used to study the numerical solutions to N-S equations under high Renolds number. Several measures are introduced to avoid spurious oscillation such as compound interpolation function, time-marching algorithm and SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin) method. Finally the square chamber is takes as an example for computation and analysis. The results show a good agreement with classical data.

Key words N-S equations, high Renolds number, Galerkin FEM, time-marching algorithm