

erfc(x)近似公式及其在求解地下水运移参数中的应用

王军辉,周志芳

(河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 推导了 erfc(x)近似公式,引进了求解地下水运移参数的新方法.为验证该方法在实际求参中的可靠性,通过两个实例,用 erfc(x)近似公式计算了压力传导系数和水动力弥散系数,计算结果表明该方法的精确性和实用性.

关键词 erfc(x)近似公式 地下水运移问题 压力传导系数 水动力弥散系数

中图分类号:P641.2 文献标识码:A 文章编号:1000-1980(2001)03-0111-04

余误差函数 erfc(x)的反函数很难精确地用初等函数显式地表达出来,这给地下水运移问题的求参带来不便.传统的求参方法(配线法、正态分布函数法、线性回归法、直线图解法)不仅需要大量的观测资料,并且操作过程中人为性大.虽然 Matlab 软件中的 erfcinv 函数能很好解决此问题,但仅局限于计算机上操作.因此非常有必要对 erfc(x)近似公式进行推导,探讨出一种用公式反求地下水运移参数的直接方法,以弥补传统方法的不足.

1 erfc(x)近似公式

1.1 公式的推导

余误差函数 erfc(x)的定义式为

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-y^2) dy \quad (1)$$

容易证明

$$\text{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy - \int_{-x}^x \exp(-y^2) dy \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\sqrt{\pi} - \int_{-x}^x \exp(-y^2) dy \right] \quad (2)$$

下面只需求出 $\int_{-x}^x \exp(-y^2) dy$,即可表达出 erfc(x)

$$\text{令} \quad A = \int_{-x}^x \exp(-y^2) dy \quad (3)$$

当 $x \geq 0$ 时,易证明

$$A = \sqrt{\int_{-x}^x \exp(-y^2) dy \cdot \int_{-x}^x \exp(-z^2) dz} = \sqrt{\iint_D \exp(-y^2 - z^2) dy dz} \quad (4)$$

D 为 YOZ 平面上正方形域: $-x \leq y \leq x, -x \leq z \leq x$ (见图 1).

为方便 $\exp(-y^2 - z^2)$ 被积出,将正方形的积分域 D 化为其外接圆 D_2 和内切圆 D_1 (见图 1)之间某个圆域 D^* ,且 D^* 半径为 u ,显然 $\sqrt{x} < u < \sqrt{2}x$,令 $u = cx$,则 $1 < c < \sqrt{2}$.不妨将 c 看成 x 的函数,则

$$A = \sqrt{\iint_{D^*} \exp(-y^2 - z^2) dy dz} = \sqrt{\pi [1 - \exp(-u^2)]} = \sqrt{\pi [1 - \exp(-c^2 x^2)]} \quad (5)$$

同理, $x < 0$ 时,有

$$A = -\sqrt{\pi [1 - \exp(-c^2 x^2)]} \quad (6)$$

将式(5)(6)代入式(3)得

$$\operatorname{erfc}(x)=\left\{\begin{array}{ll}1-\sqrt{1-\exp \left(-c^2 x^2\right)} & (x \geq 0) \\ 1+\sqrt{1-\exp \left(-c^2 x^2\right)} & (x < 0)\end{array}\right. \quad (7)$$

为计算方便,在误差允许范围内,将 c 近似成常数,便可得 $\operatorname{erfc}(x)$ 近似公式

$$\operatorname{erfc}(x) \approx\left\{\begin{array}{ll}1-\sqrt{1-\exp \left(-c^2 x^2\right)} & (x \geq 0) \\ 1+\sqrt{1-\exp \left(-c^2 x^2\right)} & (x < 0)\end{array}\right. \quad (8)$$

将式(8)进行等价变换,得到

$$x^2 \approx \frac{-\ln [2 \operatorname{erfc}(x)-\operatorname{erfc}^2(x)]}{c^2} \quad (9)$$

$\operatorname{erfc}(x) \leq 1$, x 取“+”,否则取“-”($1 < c < \sqrt{2}$, 且 c 为常数)即可方便地求解参数。

1.2 c 值的确定

由式(9)易得
$$c^2=\frac{-\ln (2 \operatorname{erfc}(x)-\operatorname{erfc}^2(x))}{x^2} \quad (x \neq 0) \quad (10)$$

可以证明

$$c^2(-x)=c^2(x) \quad (11)$$

因此只要探讨出在 $x > \alpha$ (即 $\operatorname{erfc}(x) < 1.0$) 的情况下的 c 值即可。
本文通过将大量的数据($x, \operatorname{erfc}(x)$)代入式(10)进行 c 值试算,发现 c 在 $\operatorname{erfc}(x)$ 小区间内变化不大,可近似成常数(见表1)。由表1确定的 c 值在实际地下水运移求参中精度已足够,并且 c 值分布有规律、便于记忆,因此可作为实际运用中一种参考。

表1 不同 $\operatorname{erfc}(x)$ 区间的 c 值的确定及 $\operatorname{erfc}(x)$ 误差评价
Table 1 Determination of c and errors of approximate formula of $\operatorname{erfc}(x)$ in each $\operatorname{erfc}(x)$ interval

$\operatorname{erfc}(x)$ 区间	0.005 ~ 0.014 1	0.014 1 ~ 0.051 1	0.051 1 ~ 0.157 1	0.157 1 ~ 0.370 9	0.370 9 ~ 1.000 0
c 取值	1.09	1.10	1.11	1.12	1.13
最大相对误差/%	1.56	4.66	1.87	0.85	0.93

注:表中仅列出 $\operatorname{erfc}(x) < 1.0$ 的情况,对于 $\operatorname{erfc}(x) > 1.0$,应取 $\operatorname{erfc}(x)$ 值为 $2 - \operatorname{erfc}(x)$ 后再查表1,表中每个区间不取左端点。由于 $\operatorname{erfc}(x) < 0.005$ 的观测资料在实际地下水求参问题中较少用,故表中未列出该情况下 c 值。

2 用 $\operatorname{erfc}(x)$ 近似公式求解地下水运移参数

介绍两种 $\operatorname{erfc}(x)$ 近似公式求参方法:资料稀缺时,如只有一个观测数据,则直接利用式(9);若资料丰富,可充分利用资料,将式(9)与最小二乘法结合,得

$$E=\sum_{i=1}^n\left[x_i^2-\frac{-\ln \left(2 \operatorname{erfc}\left(x_i\right)-\operatorname{erfc}^2\left(x_i\right)\right)}{c^2}\right]^2=\min \quad (12)$$

令 $\frac{dE}{d\alpha}=0$, 即可求出参数 α 。

式中: n ——观测资料的个数; α ——包含在变量 x_i 中待求的参数。

算例1^[2] 涡阳地区某河流,垂直河岸布置了几个观测孔,河流瞬时涌水上升 $\Delta h_{0,t}=1\text{ m}$,第76天各孔观测资料列入表2,计算潜水压力传导系数 α 。

根据地下水动力学原理及算例中地质条件,很容易得到模型的解析解:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta h_{x,t}=\Delta h_{0,t} \operatorname{erfc}(\lambda) \\ \lambda=\frac{x}{2 \sqrt{\alpha t}}\end{array}\right\} \quad (13)$$

式中 $u(x,t)=\Delta h_{x,t}=h_{0,t}-h_{o,t}$ 为 x 点 t 时刻的水位变幅, α 为压力传导系数。

为验证 $\operatorname{erfc}(x)$ 近似公式求参的可靠性,分别考虑两种情况(a)利用单孔资料求参:将各观测孔实测数

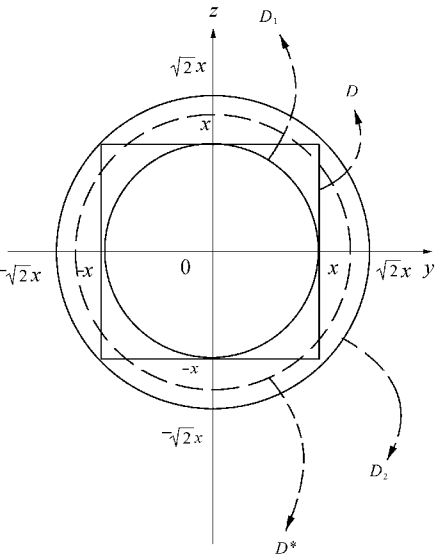


图1 D_1, D, D^*, D_2 四个积分域的位置关系

Fig.1 Positions of four integral domains : D_1, D, D^*, D_2

据直接代入式(9)分别求得: $\alpha_1=116.97\text{ m/d}$, $\alpha_2=197.24\text{ m/d}$, $\alpha_3=131.91\text{ m/d}$.(b)利用多孔资料求参:将观测资料代入式(12)和(13),求得 $\alpha_{\text{多}}=132.41\text{ m/d}$.

文献[2]中采用的配线法计算的结果为 $\alpha_{\text{配}}=621.82\text{ m/d}$,与 $\text{erfc}(x)$ 近似公式法求参结果相差很大.为说明各种方法求参可靠性,将它们求出的 α 分别代入式(13),计算 $\Delta h_{i,t}$,通过 $\Delta h_{i,t}$ 计算值与实测值误差大小来衡量各种求参方法的可靠性高低(见表3).从表中可分析到:(a)由 $\alpha_{\text{配}}$ 算出的3个孔中的 $\Delta h_{i,t}$ 误差都是最大的,因而配线法求 α 的可靠性最低;(b)由 α_3 求出的 $\Delta h_{i,t}$ 在总体上误差最小(均不超过20%).因而3号单孔资料求 α 的可靠性最高;(c)由 $\alpha_{\text{多}}$ 求出的 $\Delta h_{i,t}$ 和3号单孔最接近,而由1、2号单孔确定的 α_1 和 α_2 求出的 $\Delta h_{i,t}$ 是 $\text{erfc}(x)$ 近似公式求参方法中精度较低的,但比配线法高.因此,在观测资料丰富但又不能明确时空上最具代表性的观测数据情况下,建议采用 $\text{erfc}(x)$ 近似公式与最小二乘法结合,以保证求参的可靠性.

表 3 用各方法确定的压力传导系数 α 算出的各孔中 $\Delta h_{i,t}$ 值与其实测值比较情况

Table 3 Comparison of computed $\Delta h_{i,t}$ by α with observed data											
孔号	$\Delta h_{i,t}$ 实测值	配线法		$\text{erfc}(x)$ 近似公式(单孔)				$\text{erfc}(x)$ 近似公式(多孔)			
		$\alpha_{\text{配}}$		α_1		α_2		α_3		$\alpha_{\text{多}}$	
		计算值 /m	相对误差 /%	计算值 /m	相对误差 /%	计算值 /m	相对误差 /%	计算值 /m	相对误差 /%	计算值 /m	相对误差 /%
1	0.62	0.830	21.0	0.621	0.16	0.703	13.4	0.6416	3.5	0.6423	3.6
2	0.485	0.696	43.5	0.367	24.0	0.487	0.4	0.3956	18.4	0.3965	18.2
3	0.01	0.237	2270.0	0.0064	36.0	0.0357	257.0	0.0102	2.0	0.0104	4.0

算例2^[4] 为在溶质运移问题中检验参数计算方法求水动力弥散系数的可靠性,表4给出的数据是在 $c_0=3\,333.33\text{ g/m}^3$, $u=5.0\text{ m/d}$, $D_L=0.5\text{ m}^2/\text{d}$ 的情况下,利用式(15)算出在 $x=1.00\text{ m}$ 处的 $(c/c_0)\sim t$ 数据.

表 4 $c/c_0\sim t$ 数据
Table 4 Data of $c/c_0\sim t$

t/d	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55
c/c_0	0.57	0.259	0.500	0.691	0.819	0.898	0.943	0.967	0.983	0.991

根据地下水溶质运移理论及算例资料很容易得到该溶质运移模型的解析解

$$\frac{c}{c_0} = 0.5\text{erfc}\left(\frac{x-ut}{2\sqrt{D_Lt}}\right) + 0.5\exp\left(\frac{ux}{D_L}\right)\text{erfc}\left(\frac{x+ut}{2\sqrt{D_Lt}}\right)$$

(14)

式中: c ——时刻 t 和位置 x 上溶质的浓度, g/m^3 ; c_0 —— $x=0$ 处的恒定浓度, g/m^3 ; u ——对流速度, m/d ; D_L ——水动力弥散系数, m^2/d ,当 x 足够大或 t 足够长时,模型的解析解为

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{c_0} &= 0.5\text{erfc}(\lambda) \\ \lambda &= \frac{x-ut}{2\sqrt{D_Lt}} \end{aligned} \right\}$$

(15)

该算例观测资料丰富,利用式(12)和式(15),可求得 $D_L=0.5038\text{ m}^2/\text{d}$.现将各种方法计算结果列入表5.从表5中可看出, $\text{erfc}(x)$ 近似公式求参相对误差最小,线性回归次之,正态分布函数法最大.可见 $\text{erfc}(x)$ 近似公式求参在精度上是有保证的,另外,它和线性回归相比又有计算简单的优点,因此建议实际工作中 $\text{erfc}(x)$ 近似公式可广泛使用.

表 5 各种方法计算结果对照

Table 5 Comparison of the computational results of various methods

方法	精确解	$\text{erfc}(x)$ 近似公式	直线图解法	线性回归法	正态分布函数
$D_L/(\text{m}^2 \cdot \text{d}^{-1})$	0.5	0.504	0.510	0.507	0.564
相对误差/%	0.0	0.8	2.0	1.4	12.8

3 结 论

从公式的推导和算例应用上看 : 尽管 $\text{erfc}(x)$ 近似公式在数学上不够精确(如 c 的存在),但在实际的地下水运移问题的求参中,其精度已足够.尤其与传统求参方法相比,操作过程简单,人为性明显减少,并且可以在资料匮乏的情况下直接求参,所以 $\text{erfc}(x)$ 近似公式在地下水运移问题的求参中具有实际应用意义。

参考文献 :

[1] 许绍薄,姜东平,宋国柱,等.数学分析教程(上册)[M].南京:南京大学出版社,1992.125~126.
[2] 薛禹群,朱学愚.地下水动力学原理[M].北京:地质出版社,1986.80~81.
[3] 朱学愚,谢春红.地下水运移模型[M].北京:中国建筑工业出版社,1990.139~140.
[4] 陈崇希,李国敏.地下水溶质运移理论及模型[M].武汉:中国地质大学出版社,1996.55~59.
[5] 郭建青,郑西来.分析来维弥散试验数据的直线图解法[J].工程勘察,1997(1):42~44.

Approximation of $\text{erfc}(x)$ and Its Application in Determining the Groundwater Transport Parameters

WANG Jun-hui , ZHOU Zhi-fang

(College of Civil Engineering , Hohai Univ . , Nanjing 210098 , China)

Abstract :Based on the derivation of $\text{erfc}(x)$ approximation , a new method is introduced to determine groundwater transport parameters in this paper. To test the reliability of the method in practices , pressure transitivity and hydrodynamic dispersion coefficients are computed for two cases. The result shows that the method to determine parameters by approximating $\text{erfc}(x)$ is accurate .

Key words :approximation of $\text{erfc}(x)$; groundwater transport ; pressure transitivity ; hydrodynamic dispersion coefficient