

三维不可压缩 N-S 方程的 紧致有限差分和 Fourier 谱方法

陆昌根¹, 邵 山²

(1. 河海大学水文水资源及环境学院, 江苏 南京 210098; 2. 常州化工厂, 江苏 常州 213004)

摘要 采用高精度紧致有限差分——Fourier 谱杂交的方法直接数值模拟了三维不可压缩的 Navier-Stokes 方程. 该算法的时间离散采用三阶精度混合显隐分裂格式, 空间离散则结合 Fourier 谱方法及高精度紧致有限差分逼近. 该方法与普通的有限差分格式相比, 具有很高的逼近精度及波数分辨率. 针对三维平面槽道流的情况, 应用该算法, 直接数值模拟了三维 T-S 波在平面槽道流的传播问题, 计算结果与流动稳定性分析结果吻合一致.

关键词 紧致有限差分; Fourier 谱方法; 数值模拟

中图分类号 O357 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2001)04-0045-05

在计算流体力学中, 有限差分方法的发展是随着高速计算机的发展而迅速发展. 在近二三十年中, 湍流问题的数值研究已经取得了突破性的进展. 某些典型问题得到与实验一致的定量结果, 而且还发现了一些新的机理. Qrszag 等人在 20 世纪 70 年代就设计出高精度的谱方法, 并用此方法成功地计算了转捩问题. Rai 和 Moin, Moin 和 Kim 用差分方法较好地模拟槽道内的湍流问题. 但是, 到目前为止, 大多数有限差分格式的离散精度及分辨率都较低. 因此, 很难模拟湍流等复杂物理问题的细微结构. 本文提出一种紧致有限差分及 Fourier 谱杂交的计算方法, 即时间离散采用三阶精度混合显隐配合的三步分裂格式, 空间离散采用紧致有限差分及 Fourier 谱方法, 即展向(z 方向)采用谱方法, x, y 变量的导数采用紧致格式, 对流项应用五阶迎风紧致格式, 粘性的 Helmholtz 方程采用四阶隐式紧致格式, 压力 Helmholtz 方程采用四阶 9 点隐式的紧致格式. 该方法具有时间和空间导数变量的离散精度高、所需的网格点少、模拟高波数的物理能力强、稳定性好等等特点, 且又具有迎风机制、混合显隐相结合的优点, 较好地抑制了数值解中非物理的高频振荡现象. 文中通过直接数值模拟三维平面槽道中波的传播问题, 计算结果与流动稳定性分析解比较一致, 充分说明了该算法是可行且有效的. 它将为湍流等问题的深入研究提供一种新的手段.

1 理论模型和数值方法

1.1 理论模型

三维非定常不可压缩无量纲化的 N-S 方程如下:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2}$$

其中 $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T$ $\nabla^2 = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}$ $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$

式中: u, v, w —— x, y, z 方向上的分量; p ——压力; Re ——雷诺数, $Re = Uh/\nu$; U ——槽流的平均速度; h ——槽道中心线到壁面的距离; ν ——运动粘性系数.

收稿日期 2001-03-20
基金项目 河海大学科技创新基金项目
作者简介 陆昌根(1961—),男,江苏丹阳人,副教授,博士,流体力学专业,主要从事湍流及流动稳定性研究.

假设在 z 方向满足周期性边界条件, 并将方程(1)和(2)中的物理量 u, v, w, p 用通式 ϕ 表示, ϕ 在展向 (z 方向) 采用 Fourier 展开, 表达式为

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \phi_m(x, y, t) e^{-im\beta z} \quad m = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3)$$

式中: N ——截断误差的项数; β ——展向波数.

将式(3)代入式(1)整理并获得一簇系列的 m 次齐次二维方程组:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} + F_m[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -\nabla_m p_m + \frac{1}{Re} \nabla_m^2 \mathbf{u}_m \quad m = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4)$$

式中 $\nabla_m = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, -im\beta \right\}$, $\nabla_m^2 = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (-m^2\beta^2) \right\}$; $F_m[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]$ 为非线性的傅里埃展开的转移系数:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} F_m[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] e^{-im\beta z} \quad m = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

1.2 数值计算方法

1.2.1 时间导数离散

时间导数采用三阶精度混合显隐相结合的三步分裂格式:

$$(\mathbf{u}'_m - \sum_{q=0}^{J_i-1} \alpha_q \mathbf{u}_m^{n-q}) / \Delta t = - \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q F_m[(\mathbf{u}^{n-q} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n-q}] \quad (5)$$

$$(\mathbf{u}''_m - \mathbf{u}'_m) / \Delta t = -\nabla_m p_m^{n+1} \quad (6)$$

$$(\gamma_0 \mathbf{u}_m^{n+1} - \mathbf{u}''_m) / \Delta t = \frac{1}{Re} \nabla_m^2 \mathbf{u}_m^{n+1} \quad (7)$$

式中: $\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}''_m$ ——中间速度; J_i, J_e ——格式精度参数; $\alpha_q, \beta_q, \gamma_0$ ——权数, $\gamma_0 = \sum_{q=0}^{J_i-1} \alpha_q$.

当时间导数离散时, 时间精度增加, 该分裂格式的稳定性几乎保持不变, 构造高阶时间精度也相当容易; 在 CFL 数相当大时, 稳定性较好. 根据文献[2]选取三阶时间精度的权数为: $\gamma_0 = 11/6, \alpha_0 = 3, \alpha_1 = -3/2, \alpha_2 = 1/3, \beta_0 = 3, \beta_1 = -3, \beta_2 = 1$.

1.2.2 空间导数离散

对于方程(5)~(7)的空间导数采用不同紧致格式进行数值离散.

1.2.2.1 非线性对流项

计算方程(5)右端的非线性对流项 $F_m[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]$ 时, 采用五阶显式迎风紧致有限差分格式. 为方便起见, 仅取 $u \frac{\partial u}{\partial x}$ 为例来讨论它的紧致有限差分格式:

$$\frac{u_i + |u_i|}{2} F1 + \frac{u_i - |u_i|}{2} F2 \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} 3F1 + 2F2 &= \delta_x^- \tilde{u}_i^+ & u_i > 0 \\ 2F2 + 3F1 &= \delta_x^+ \tilde{u}_i^- & u_i < 0 \\ \delta^\pm \tilde{u}^\pm &= \pm \frac{\tilde{u}_{i\pm 1}^\pm - \tilde{u}_i^\pm}{\Delta x} \end{aligned}$$

式中 $F1, F2$ 分别对应于 $u_i > 0, u_i < 0$ 在 i 节点上的一阶导数. 对于边界和邻近边界处理, 分别采用二阶精度和三阶精度的紧致格式逼近.

1.2.2.2 压力 Helmholtz 方程

若对方程(6)取散度, 并整理得压力 Helmholtz 方程的通式为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - bp = f \quad (9)$$

其中 $b = m^2\beta^2$, f 与中间速度场的散度成正比, 即 $f = \frac{\nabla_m \cdot \mathbf{u}_m'}{\Delta t}$. 从方程(9)获得解后, 再求压力的梯度代入式(6), 可求解得中间速度场 $\mathbf{u}_m''$. 下面先讨论散度及梯度的数值离散, 由于它们计算的每项偏导数的过程相

同,所以本文对散度及梯度离散采用相同的离散格式,在这里取 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 为例,讨论 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 六阶对称紧致有限差分格式:

$$F_{i+1} + 3F_i + F_{i-1} = \frac{14}{3}\delta u_i + \frac{1}{6}(\delta u_{i+1} - \delta u_{i-1}) \tag{10}$$

其中 $\delta = \frac{1}{2}(\delta_x^+ + \delta_x^-)$ $\delta_x^+ u_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$ $\delta_x^- u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$

式中 F_i 为一阶偏导数.

对于边界与邻近边界处理分别采用三阶和四阶对称紧致格式.

关于 Helmholtz 方程 (9) 采用 9 点四阶精度隐式紧致有限差分格式:

$$\begin{aligned} & \frac{10(p_{i+1} + p_{i-1}) - 2(p_{i+2} + p_{i-2}) + (p_{i+3} + p_{i-3} + p_{i+4} + p_{i-4}) - 20p_i}{(\Delta x)^2} + \\ & \frac{10(p_{i+2} + p_{i-2}) - 2(p_{i+1} + p_{i-1}) + (p_{i+3} + p_{i-3} + p_{i+4} + p_{i-4}) - 20p_i}{(\Delta y)^2} - \\ & b(8p_i + p_{i+1} + p_{i-1} + p_{i+2} + p_{i-2}) = 8f_i + f_{i+1} + f_{i-1} + f_{i+2} + f_{i-2} \end{aligned} \tag{11}$$

1.2.2.3 粘性 Helmholtz 方程

根据方程 (7),并取 x 向为例讨论粘性扩散方程.首先 $u = u_m, u'' = u''_m$,即 x 向的粘性 Helmholtz 方程:

$$\frac{\gamma_0 u^{n+1} - u''}{\Delta t} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial y^2} - bu^{n+1} \right) \tag{12}$$

其中 $b = m^2 \beta^2$.在湍流运动中一般雷诺数都很大,若 Re 在 30 000 ~ 70 000 范围内变化,或者更大时,时间步长取 10^{-2} 量级.再分析式 (12)

可知 $\frac{\Delta t}{Re\gamma_0}$ 为 10^{-6} 量级,那么 $(\frac{\Delta t}{Re\gamma_0})^2$ 为 10^{-12} 量级,这样在式 (12)中加上或减去 $(\frac{\Delta t}{Re\gamma_0})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (u^{n+1})$ 的物理量,不会对方程 (12)的物理理解产生很大误差,这样式 (12)可近似表示如下式子:

$$(1 - S \frac{\partial^2}{\partial x^2})(1 - S \frac{\partial^2}{\partial y^2})u^{n+1} = C \tag{13}$$

其中 $S = (\frac{\Delta t}{Re\gamma_0})(1 + \frac{\Delta t m^2 \beta^2}{Re\gamma_0})$ $A = \frac{1}{\gamma_0} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{m^2 \beta^2 \Delta t}{Re\gamma_0})}$ $C = Au''$

再令 $\varphi = (1 - S \frac{\partial^2}{\partial y^2})u^{n+1}$,这样式 (13)转化为如下方程式:

$$(1 - S \frac{\partial^2}{\partial x^2})\varphi = C \quad (1 - S \frac{\partial^2}{\partial y^2})u^{n+1} = \varphi \tag{14}$$

分析方程 (14)可知,能写成如下通式:

$$(1 - E \frac{\partial^2}{\partial h^2})\varphi = F \tag{15}$$

式中: E, F ——常数; φ ——因变量; h ——变量.

方程 (15)的四阶精度对称紧致有限差分格式为

$$(\alpha - EG)\varphi_{i-1} + (1 - 2EG)\varphi_i + (\alpha - EG)\varphi_{i+1} = \alpha F_{i+1} + F_i + \alpha F_{i-1} \tag{16}$$

其中 $\alpha = \frac{1}{10}$ $G = \frac{12}{10} \cdot \frac{1}{h^2}$

对于二阶导数边界处理采用二阶精度的中心差分格式补充一个辅助方程.另外,对于 y 向和 z 向的速度 v_m^{n+1} 和 w_m^{n+1} 的数值解的确定与 x 向的 u_m^{n+1} 的确定采用相同的紧致有限差分格式求解,从而方程 (5)(6)(7) 的数值解就一一确定了,依次可以获得在任何时刻的速度场 u, v, w 和压力 p .

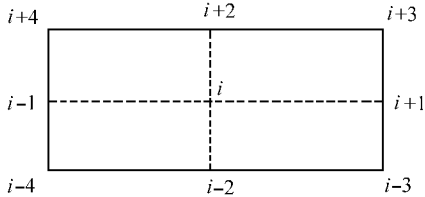


图 1 9 点隐式紧致格式在 i 节点邻近的单个网格框架

Fig.1 Nine-node single cell of the implicit compact scheme near node i

2 计 算 结 果

2.1 流 动 稳 定 性 分 析

在流动稳定性分析中,把 u, v, w, p 的扰动部分设为行进波的形式:

$$\left. \begin{aligned} u &= \tilde{u}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + c.c. & v &= \tilde{v}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + c.c. \\ w &= \tilde{w}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + c.c. & p &= \tilde{p}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + c.c. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中: α, β ——波数; ω ——频率.

把式(17)代入式(1),整理并略去扰动波的非线性项的影响,再利用式(2)消去 $\tilde{u}, \tilde{w}$ 及 $\tilde{p}$ 可得到关于 $\tilde{v}$ 的方程:

$$\left[\frac{1}{Re} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) - i(\alpha \bar{u} + \beta \bar{w} - \omega) \right] (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i\alpha D^2 \bar{u} + i\beta D^2 \bar{w} \tilde{v} = 0 \quad (18)$$

其中 $D = \frac{d}{dy}$, $\bar{u}$ 和 $\bar{w}$ 为平均流的解,边界条件为 $\tilde{v} = D\tilde{v} = 0$ 在 $y = \pm 1$ 处,方程(18)与边界条件构成一特征值问题,从而可以求出特征值 α 和特征函数 $\tilde{v}$,然后确定特征函数 $\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{p}$.

2.2 数 值 结 果

由于计算在 z 方向上用了傅里埃变换,所以在计算域中的 z 方向上波数应取为实数,而模拟波在 x 方向上的传播.本文研究一般三维的传播问题,其计算区域及扰动波传播形式如图 2.

这里研究的三维波传播方向与流向夹角为 45° ,计算时加入的初始扰动场为零,在与流向夹角 45° 的方向上加入一幅值 a 为常数 T-S 波来考查该扰动波沿另一个与流向夹角为 45° 的方向上的传播情况.即在 $x = 0$ 处,沿 z 方向上加入 T-S 波 $u = \tilde{u} e^{i(\beta z - \omega t)} + \text{共扼项}$, $p = \tilde{p} e^{i(\beta z - \omega t)} + \text{共扼项}$,随着时间的演化,波将沿着 x 方向传播.这就可以模拟波沿非流向的一般传播情况.加入的 T-S 波选取在流向夹角为 45° 的方向上(z 方向上)波数 β 为实数,而在其垂直方向(x 方向上)波数 α 应为复数,为了与线性理论结果比较,扰动的幅值 a 取得很小,为 $0.001 U_0$,计算时间为 80 个无量纲单位时间,经综合平均求得 α_r, α_i 的解,然后再求得群速度.表 1 给出了计算和分析结果.

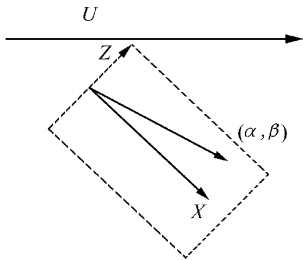


图 2 一般三维扰动波传播计算域
Fig.2 Calculated region of the general 3D instability wave propagation

表 1 计算和分析结果($Re = 5772, \omega = 0.289, \beta = 0.612$)

Table 1 Calculated and analytic results($Re = 5772, \omega = 0.289, \beta = 0.612$)

结 果	α_r	α_i (增长率)	群速度($\frac{d\omega}{d\alpha}$) 实部
流动稳定性分析结果	0.884	-0.0026	0.290
数值计算结果	0.883	-0.0036	0.282

从表 1 可知,流动稳定性分析结果与数值结果吻合较好,而且 $\frac{d\omega}{d\alpha}$ 实部能近似代表沿 x 方向上的波的传播速度.该算例在奔腾 III 微机上计算仅需 10 min,且具有稳定性好、收敛速度快、无边界反射等优点.

3 结 论

本文对时间导数采用三阶精度的混合显隐的三步分裂格式和空间导数运用四阶以上的紧致有限差分及 Fourier 谱方法杂交的数值方法,具有良好的稳定性,且具有收敛精度高、分辨率好等优点,该格式将为湍流运动的研究提供一种良好的方法.

参考文献:

[1] Qrszag S A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation[J]. J Fluid Mech, 1971, 50: 698 ~ 703.
[2] Rai, Moin. Direct simulation of turbulent flow using finite difference schemes[J]. J Comp Phys, 1991, 96: 15 ~ 53.

[3] Kim J ,Moin P.Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number[J].J Comp Phys ,1987 ,177 :133 ~ 166.
[4] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J].J Comp Phys ,1992 ,103 :16 ~ 43.
[5] 傅德薰 ,马延文.平面混合流拟序结构的直接数值模拟[J].中国科学 A 辑 ,1997 ,26(7) :648 ~ 664.

Compact Finite Difference-Fourier Spectral Method for
3D Incompressible N-S Equations

LU Chang-gen¹ SHAO Shan²

(1. College of Water Resources and Environment ,Hohai Univ . ,Nanjing 210098 ,China ;
2. Changzhou Chemical Plant ,Changzhou 213004 ,China)

Abstract: In this paper , a new high precision compact finite difference-Fourier spectral hybrid method for 3D incompressible N-S equations is proposed. In this method , the third order precision mixed explicit-implicit scheme is employed for the time integration , and the space discretization is implemented by the combination of the Fourier spectral expansion with the high precision compact finite difference. The method is applied to a propagation problem of 3D T-S waves on plane-channel flow , and the results are in good agreement with the theoretic data.

Key words compact finite difference ; Fourier spectral method ; numerical simulation

《河海大学学报(自然科学版)》征订启事

《河海大学学报(自然科学版)》是以水资源开发、利用与保护为重点的综合性学术期刊 ,主要刊登本校在水资源、水文、地质、测量、水利工程、水电工程、水运工程、海洋及海岸工程、水工结构、工程力学、水力学及河流动力学、岩土工程、计算机科学、电力工程、电子技术及自动化工程、工业与民用建筑、管理工程、水利经济、环境工程、机械工程等学科方面的科研成果学术论文、学术讨论、研究动态等学术性文章 ,可供上述有关专业的科技工作者及大专院校师生阅读和参考。

本刊创办于 1957 年 ,是我国中文核心期刊 ,在国内工程技术界和学术界有较大影响。刊载的文章中 ,有不少国家科技攻关(重点)项目和各种科学基金资助项目的研究成果 ,部分达到了国内领先和国际先进水平 ,为我国水利、水电、水运工程及其他有关工程建设的规划、设计、施工和管理提供了科学理论、方法和具体建议 ,发挥了较大的社会效益和经济效益 ,深受工程界和科技界赞许 ,并获得全国优秀高校自然科学学报二等奖 ,以及全国水利系统优秀期刊、江苏省优秀期刊称号。本刊每逢单月出版 ,国内外公开发行 ,邮发代号 : 28-63 ,每期定价 8.00 元 ,全年订费 48.00 元。欢迎广大读者在全国各地邮局订阅或直接与编辑部联系。联系地址 :南京市西康路 1 号《河海大学学报》编辑部 邮政编码 210098。