

一类多目标优化问题弱有效解的优界数列法

王海鹰,董祖引,张乃良

(河海大学数学物理系,江苏 南京 210098)

摘要 :引进了求解一类多目标优化问题弱有效解的优界数列方法 ,给出了这种优界数列的构造法及相应的算法 .算例表明 ,优界数列法是非常有效和可靠的方法 ,而且适用范围也较广泛 .

关键词 :多目标优化 ;弱有效解 ;优界数列

中图分类号 :O221 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2001)05-0033-05

在线性规划和非线性规划中 ,所研究的问题只含一个目标函数 ,为单目标优化问题 .但在很多实际问题中 ,人们更多地会遇到同时追求多个目标在某种意义下的优化问题 ,为多目标优化问题 .

一些常见的多目标优化问题 ,可以归结为如下的数学模型 :

$$\begin{cases} \min f(x) = \min (f_1(x), \dots, f_p(x))^T \\ \text{s.t.} \begin{cases} g_j(x) \leq 0 & j = 1, \dots, m \\ h_t(x) = 0 & t = 1, \dots, l \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$
$$\quad \quad \quad \begin{cases} g_j(x) \leq 0 & j = 1, \dots, m \\ h_t(x) = 0 & t = 1, \dots, l \end{cases} \quad (2)$$

其中 $x \in R^n$, $p \geq 2$.若记 $D = \{x \in R^n \mid g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m; h_t(x) = 0, t = 1, \dots, l\}$,则上述模型可简化为

$$\min_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D} (f_1(x), \dots, f_p(x))^T \quad (3)$$

其中 $D \subseteq R^n$.对每个单目标分别求解 ,得最优解 $x^{(i)}$,最优值 f_i^* ,即

$$\min_{x \in D} f_i(x) = f_i(x^{(i)}) = f_i^* \quad i = 1, \dots, p \quad (4)$$

称 $f^* = (f_1^*, \dots, f_p^*)^T$ 为(3)的理想点 ,当 $x^{(1)} = \dots = x^{(p)}$ 时 (3)有绝对最优解 $x^* = x^{(i)}, i = 1, \dots, p$,绝对有效点 f^* .但是 ,在一般情况下 ,很难保证有 $x^{(i)} = x^{(j)}, 1 \leq i, j \leq p$,即绝对最优解不一定存在 .因此 ,人们常常寻求(3)的有效解或者弱有效解 .

目前求解多目标优化的有效解、弱有效解有多种方法 ,例如评价函数法 ,而带权的极大模理想点方法和带权的极大极小方法是评价函数法中常用的两种方法^[1] .

当已知理想点 f^* 时 ,带权的极大模理想点方法把求解(3)的问题转化成下列问题 :

$$\min_{x \in D} U(f(x)) = \min_{x \in D} \max_{1 \leq i \leq p} \{\lambda_i (f_i(x) - f_i^*)\} \quad (5)$$

其中 $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = 1, \dots, p$.

为了求其解 ,得把(5)转化成如下的单目标优化问题 :

$$\begin{cases} \min_{x \in D} W(x, y) = y \\ \text{s.t.} \quad \lambda_i (f_i(x) - f_i^*) \leq y \quad i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (6)$$

记 $A = \{\lambda \mid \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = 1, \dots, p\}$

对每个给定的 $\tilde{\lambda} \in A$,则相应于(5)的最优解必是(3)的弱有效解^[1] .而带权的极大极小方法是 将(3)转化成下面的问题 :

$$\min_{x \in D} W(f(x)) = \min_{x \in D} \max_{1 \leq i \leq p} \{\lambda_i f_i(x)\} \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T \in A \quad (7)$$

同样地,还得将(7)转化为下面的单目标优化问题:

$$\begin{cases} \min_{x \in D} W(x, y) = y \\ \text{s.t.} \quad \lambda_j f_j(x) \leq y \quad i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (8)$$

一般地,人们通常把求解(5)(7)的问题转化为求解(6)和(8).在求解非线性规划问题的方法中,最有效的算法之一是广义简约梯度法(GRG法).然而在此方法的收敛性的充分必要条件中,约束问题需满足非退化性^[2].另一方面,即使用GRG法求解非线性规划问题也只能保证所求解的问题的K-T点(即Kuhn-Tucker点).但在一般情况下,K-T点不一定是最优解.

对此,我们引进了优界数列法,可以直接求解问题(5)和(7),而不必转化成(6)和(8).而且在通常条件下,这种方法可保证所求解是问题(5)和(7)的最优解.此方法关键是构造优界数列逼近最优值.本文针对目标函数及约束函数是Lipschitz类函数的问题(5)(7)构造优界数列,同时给出了相应的算法,从而得到了求解多目标优化问题(3)弱有效解的一种行之有效的方法.本文中所用的一些记号及相关术语均引自[1,2].

1 优界数列的构造

如在(1)中令 $Q(x) = \max_{1 \leq i \leq p} \{f_i(x)\}$, 则 $Q(x)$ 就是(1)的一种评价函数.可将问题(1)及(2)转化成如下的带约束条件的极大极小问题:

$$\begin{cases} \min Q(x) = \min_{1 \leq i \leq p} \max \{f_i(x)\} \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} g_j(x) \leq 0 & j = 1, \dots, m \\ h_t(x) = 0 & t = 1, \dots, l \end{cases} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \min Q(x) = \min_{1 \leq i \leq p} \max \{f_i(x)\} \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} g_j(x) \leq 0 & j = 1, \dots, m \\ h_t(x) = 0 & t = 1, \dots, l \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

其中 $x \in R^n$.可行域仍记为 $D = \{x \in R^n \mid g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m; h_t(x) = 0, t = 1, \dots, l\}$.

显然(5)和(7)同属此类问题.

令 S 是一个正数, $D \subseteq R^n$, $f_i: D \rightarrow R (i = 1, \dots, p)$ 是给定的函数, $f_1, \dots, f_p$ 的极大熵函数 $\varphi_S: D \rightarrow R$, 定义为

$$\forall x \in D, \varphi_S(x) = \frac{1}{S} \ln \left\{ \sum_{i=1}^p \exp(S f_i(x)) \right\} \quad (11)$$

引理1^[3] 设 $Q(x) = \max_{1 \leq i \leq p} \{f_i(x)\}$ 对 $\forall x \in D$, 总有

$$Q(x) \leq \varphi_S(x) \leq Q(x) + \frac{1}{S} \ln(p) \quad (12)$$

引理2^[3] 给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $S > N$ 时, 对 $\forall x \in D$, 总有

$$|\varphi_S(x) - \max_{1 \leq i \leq p} \{f_i(x)\}| < \varepsilon \quad (13)$$

并且对一切正整数 S , $\varphi_S(x)$ 关于 S 是单调减少的.

注:在[3]中 S 为正整数, 可以证明对 $S > 0$, 引理1及引理2同样成立^[4].

引理3^[4] 设 $\{S_k\}$ 是单调增加的正数数列, $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \infty$. 记可行域为 D . 问题(9)(10)有最优解 x^* , 令 $\{\alpha_k\}$ 是一个实数数列, 使得 $k \geq 1$ 时, $\alpha_k \leq \alpha = \min_{x \in D} Q(x) = Q(x^*)$, 此处 $Q(x) = \max_{1 \leq i \leq p} \{f_i(x)\}$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \alpha$. 记 $D_k = \{x \in D \mid Q(x) \leq \alpha_k + \frac{1}{S_k} \ln(p)\}$ 与 $D_\infty = \{x \in D \mid Q(x) = \alpha\}$ 则 (a) 存在 $K > 0$, 当 $k \geq K$ 时, $D_k \neq \emptyset$ (b) $D_\infty = \bigcap_{k \geq K} D_k$.

利用这些引理, 可以构造一系列的极大熵函数 $\{\varphi_{S_k}\}$ 来作为极大极小问题(9)及(10)即问题(5)和(7)的带约束条件的优界数列 $\{\alpha_k\}$.

记区间 $X = (X_1, \dots, X_n)^T = \{x \in R^n \mid \underline{X}_i \leq x_i \leq \bar{X}_i, i = 1, \dots, n\}$, 区间 X 的中点、宽度分别记为 $m(X) = (m(X_1), \dots, m(X_n))^T$, $m(X_i) = \frac{1}{2}(\underline{X}_i + \bar{X}_i)$, $i = 1, \dots, n$ 与 $u(X) = (u(X_1), \dots, u(X_n))^T$, $u(X_i) = \bar{X}_i - \underline{X}_i$, $i = 1, \dots, n$; 令 $f^*(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$.

设 $X \subseteq X^{(0)}$, $f(x)$ 在 X 上的区间扩张为 $F(X)$, 若当 $u(X) \rightarrow 0$ 时, 有

$$u(F(X)) - u(f^*(X)) \rightarrow 0 \quad (14)$$

称 $f(x)$ 的区间扩张 $F(X)$ 具有收敛性质^[5].

在问题 (9) 及 (10) 中, 设 $Q(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))^T$ 的每个分量 $f_i(x)$ 是带有 Lipschitz 常数 C_i 的 Lipschitz 连续函数, 并设 $f_1, \dots, f_p$ 的极大熵函数是 $\varphi_S(x)$, 它的区间扩张 $\Phi_S(X)$ 可如下构造: 对 $\forall X \subseteq X^{(0)} \subseteq R^n, \forall x \in X$,

$$\varphi_S(x) \in \Phi_S(X) = \varphi_S(m(X)) + \alpha(X - m(X)) \quad (15)$$

再设 (10) 中的约束条件 $g_j(x) (j = 1, \dots, m), h_t(x) (t = 1, \dots, l)$ 连续且具有包含单调性及收敛性质的区间扩张 $G_j(X) (j = 1, \dots, m), H_t(X) (t = 1, \dots, l)$, 记 $K(X^{(0)})$ 为广义可行区间集, 设 $\overline{G_j(X)} = \sup G_j(X), j = 1, \dots, m$, 则

$$K(X^{(0)}) = \{X \subseteq X^{(0)} \mid \overline{G_j(X)} \geq 0, j = 1, \dots, m, 0 \in H_t(X), t = 1, \dots, l\}$$

这样, 当初始区间 $X^{(0)}$ 被剖分成等宽度的 K 个小区间 $X^{(i)}, i = 1, \dots, k$ 时, $\|u(X^{(i)})\|_\infty = \frac{1}{k} \|u(X^{(0)})\|_\infty, i = 1, \dots, k$. 令 $\Phi_{S_k}(X^{(i)}) = \varphi_{S_k}(m(X^{(i)})) + \alpha(X^{(i)} - m(X^{(i)}))$.

为了考虑 (10) 式, 仅取 $X^{(i)} \in K(X^{(0)})$ 的子区间, 令整标集 $I = \{i \mid X^{(i)} \in K(X^{(0)})\}$, 再作

$$\alpha_k = \min_{i \in I} \{\inf \Phi_{S_k}(X^{(i)})\}$$

下面证明 $\{\alpha_k\}$ 即是问题 (9) 及 (10) 最优值的下界数列.

定理 1 设带约束极大极小问题 (9) 及 (10) 的最优值 $\alpha = Q(x^*)$ 给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $K > 0$, 使得 $k \geq K$ 时, 有

$$|\alpha - \alpha_k| < \varepsilon \quad (16)$$

证明: 由引理 2, 如果 k_1 充分大, $k \geq k_1$, 则 $|\varphi_{S_k}(x) - Q(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in X^{(0)}$, 显然

$$|\varphi_{S_k}(x^*) - Q(x^*)| = |\varphi_{S_k}(x^*) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (17)$$

若 k_2 充分大, $k \geq k_2$, 由收敛性质, 当 $\|u(X^{(i)})\|_\infty = \frac{1}{k} \|u(X^{(0)})\|_\infty < \delta$ 时, 有 $\overline{G_j(X^{(i)})} \leq \varepsilon, j = 1, \dots, m$;

又因为 $h_t(x)$ 连续, 故 $w(h_t^*(X^{(i)})) < \frac{\varepsilon}{2}$ 时, 由 (14), $w(H_t(X^{(i)})) < \varepsilon, X^{(i)} \in K(X^{(0)}), \overline{H_t(X^{(i)})} \leq 0 \leq \overline{H_t(X^{(i)})}, t = 1, \dots, l; i \in I$. 另一方面, 由 α_k 的构造, 至少存在一个 $X^{(i)} \in K(X^{(0)})$, 不妨设 $X^{(j)}$, 使得

$$\alpha_k = \inf \Phi_{S_k}(X^{(j)}) = \min_{i \in I} \{\inf \Phi_{S_k}(X^{(i)})\}$$

由 (15),

$$|\varphi_{S_k}(m(X^{(j)})) - \inf \Phi_{S_k}(X^{(j)})| \leq \frac{C \|u(X^{(j)})\|_\infty}{2} = \frac{C \|u(X^{(0)})\|_\infty}{2k} \quad (18)$$

因此

$$|\varphi_{S_k}(x^*) - \alpha_k| \leq |\varphi_{S_k}(m(X^{(j)})) - \alpha_k| + \frac{1}{S_k} \ln(p)$$

让 k_3 充分大, 当 $k \geq k_3$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \infty$, 由 (18),

$$|\varphi_{S_k}(x^*) - \alpha_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (19)$$

这样, 取 $K = \max\{k_1, k_2, k_3\}$, 由 (17) 和 (19) 得 $k \geq K, |\alpha - \alpha_k| < \varepsilon$.

定理 1 提供了计算极大极小问题 (9) 及 (10) 最优值的优界数列的一种方法, 这样也就给出了求解多目标优化问题 (3) 弱有效解的优界数列方法.

2 算 法

引理 4^[3] 设 $X \subseteq X^{(0)}$, 且 $\bar{Q}$ 是 $\min_{x \in X^{(0)}} \max_{1 \leq i \leq p} \{f_i(x)\}$ 在 $X^{(0)}$ 上的一个上界, 并设 $\forall x \in X$, 且对至少一个 $k \in \{1, \dots, p\}$,

$$f_k(x) > \bar{Q} \geq Q^* = \min_{x \in X^{(0)}} \max_{1 \leq i \leq p} \{f_i(x)\} \quad (20)$$

则在 X 中不存在极大极小点.

现在给出多目标优化问题 (3) 的弱有效解的优界数列方法的算法.

设 (9) 及 (10) 中的函数均为 Lipschitz 连续函数 $f_i(x), i = 1, \dots, p; g_j(x), j = 1, \dots, m; h_t(x), t = 1, \dots, l$ 的区间扩张分别为 $F_i(X), i = 1, \dots, p; G_j(X), j = 1, \dots, m; H_t(X), t = 1, \dots, l$. 而 $f_1, \dots, f_p$ 的极大熵函数 $\varphi_S(x)$ 的区间扩张为 $\Phi_S(X)$. 算法如下 (a) 初始化. $X = X^{(0)}$ 精度 $\varepsilon > 0, CF = \max_{1 \leq i \leq p} \{f_i(m(X))\}$ (9) 及 (10) 的一个上界记为 $BF, FI(X) = \inf_{1 \leq i \leq p} \{F_i(X)\}$. 表 L 中元素记为 $(X, FI(X), CF(X))$. (b) 取表 L 中第一个元素 $(X, FI(X), CF(X))$, 若 $|FI(X) - BF| < \varepsilon$ 转步 (i). (c) 等分 $X = X^{(1)} \cup X^{(2)}$, 检验 $X^{(1)}, X^{(2)}$ 是否属于 $X(X^{(0)})$. 若是, 转下一步; 不是, 删除. (d) 若 $\inf \{F_i(X^{(1)})\} > BF, i = 1, \dots, p$ 至少有一个成立, 由引理 4, 删除 $X^{(1)}$. 同样地对 $X^{(2)}$ 进行讨论. (e) 若 $\inf \{\Phi_{S_k}(X^{(1)})\} - \frac{1}{S_k} \ln(p) > CF(X^{(2)})$, 由引理 1, 删除 $X^{(1)}$. 同样地对 $X^{(2)}$ 进行讨论. (f) 把 $(X^{(i)}, FI(X^{(i)}), CF(X^{(i)})), i = 1, 2$, 排入表 L 中, 以 $FI(X^{(i)})$ 的大小为序. (g) 若 $m(X^{(1)}), m(X^{(2)})$ 为可行点, 令 $BF = \min\{CF(X^{(1)}), CF(X^{(2)}), BF\}$. (h) 如表 L 是空的, 打印相关信息, 转步 (j). 否则转步 (b). (i) 打印结果, 可得 (3) 的弱有效解 $m(X)$ 及弱有效点 $(f_1(m(X)), \dots, f_p(m(X)))^T$. (j) 结束.

我们得到 (9) 和 (10) 的近似最优解 x^* , 是多目标优化问题 (3) 的弱有效解.

3 算 例

例 1 求解

$$\begin{cases} V = \min(f_1, f_2) = \min(-x_1^2 - x_2^2, x_1 - x_2) \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 \leq 0.25 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (21)$$

解: 用加权极大极小方法, 不妨取 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$, 即

$$\begin{cases} \min \max\{0.5(-x_1^2 - x_2^2), 0.5(x_1 - x_2)\} \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 \leq 0.25 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (22)$$

若用 GRG 法求解 (22) 需转化为单目标规划如下:

$$\begin{cases} \min V(x, y) = y \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} g_1 = -x_1^2 - x_2^2 + x_3 - 2y = 0 \\ g_2 = x_1 - x_2 + x_4 - 2y = 0 \\ g_3 = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 + x_5 = 0.25 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (23)$$

计算 $(\nabla g_1, \nabla g_2, \nabla g_3) = \begin{bmatrix} -2x_1 & -2x_2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2x_1 - 1 & 2x_2 - 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$

取 $x_B = (x_3, x_4, x_5)^T, x_N = (x_1, x_2, y)^T$, 初始可行点 $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0.25, 0)^T$. 因此是退化问题, 可求得 $r_N = (0, 0, 1)^T, \tilde{x}_N^{(0)} = x_N^{(0)} + \theta d_N = (0, 0, -\theta)^T$, 并得 $\tilde{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0.25, 0)^T = x^{(0)}$, 故计算无法进行. 用优界数列法直接求解 (22) 精度 $\varepsilon < 0.5 \times 10^{-5}$, 迭代 172 次, 表 L 尚有 9 个元素, 计算结果 (21) 的弱有效解为 $x^* = (0.000004, 1.207112)^T$, 弱有效点 $f^* = (-1.457119, -1.207108)^T$.

事实上, 在一些实际问题中是很难预先判断问题是否是非退化的, 如例 1, 因此, 为了解决这种退化问题, 人们还得设计一些其他的可行方法, 这样必然给计算增加一些新的困难. 但是, 优界数列法不但可以避免退化与非退化问题的讨论, 亦可避免进行初始可行点选择的讨论.

例 2 求解

$$\begin{cases} V = \min(-x_1^2 - x_2^2 - 1, x_1 - x_2 - 2) \\ \text{s. t.} \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 \leq 0.25 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (24)$$

解:同上例,即求解

$$\begin{cases} \min \max\{0.5(-x_1^2 - x_2^2 - 1), 0.5(x_1 - x_2 - 2)\} \\ \text{s. t.} \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 \leq 0.25 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (25)$$

同样地为了利用 GRG 法,则需将(25)转化成

$$\begin{cases} \min W(x, y) = y \\ \text{s. t.} \quad \begin{cases} -x_1^2 - x_2^2 + x_3 - 2y = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 - 2y = 2 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 + x_5 = 0.25 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5 \end{cases} \end{cases} \quad (26)$$

给出初始可行点 $x^{(0)} = (0, 0, 1, 2, 0.25, 0)^T$,经迭代收敛到 $x' = (0, 0, 0, 1, 0.25, -0.5)^T$,不难验证 x' 是 K-T 点, $W(x') = -0.5$.取可行点 $x'' = (0.2, 0.8, 0.08, 1, 0.57, -0.8)^T$,则 $W(x'') = -0.8 < W(x') = -0.5$.因此, x'' 是(26)问题的 K-T 点,但不是(26)的最优解.如果用优界数列法求解(25), $\epsilon < 0.5 \times 10^{-5}$,迭代 79 次,表 1 中尚有元素 5 个.计算结果如下:(24)的弱有效解为 $x^* = (0.306250, 1.344074)^T$,弱有效点 $f^* = (-2.900324, -2.994224)^T$.

由此例可以看出,对非退化问题(26),虽然 GRG 法可以求出 K-T 点,但 K-T 点也不一定是最优解(除非是凸规划的情况),但使用优界数列可以直接构造出问题(25)的最优值的优界数列.只要最优值存在,目标函数和约束函数是 Lipschitz 连续的,则所构造的优界数列就一定收敛到最优值,因此用优界数列法计算就更可靠一些.

此外,优界数列法并不像 GRG 等方法那样需要目标函数及约束函数具有一阶偏导数存在,所以用优界数列法可以解决更为广泛的一些问题.

参考文献:

[1] 林铨云,董加礼.多目标优化的方法与理论[M].长春:吉林教育出版社,1992.55~76.
[2] 唐焕广,秦学志.最优化方法[M].大连:大连理工大学出版社,1994.184~192.
[3] Shen Zuhe, Huang Zhenyu, Wolfe M A. An interval maximum entropy method for a discrete minimax problem[J]. Applied Math and Comput, 1997, 87: 49~68.
[4] 王海鹰,张乃良.带约束条件的离散 Minimax 问题的区间极大熵方法[J].高校应用数学学报(A辑),2000,15(3):369~376.
[5] 沈祖和.区间分析方法及其应用[J].应用数学与计算数学,1983(2):1~27.

An Optimal Boundary Sequence Method for Finding Weak Efficiency Solution to Multi-Objective Optimization Problem

WANG Hai-ying, DONG Zu-yin, ZHANG Nai-liang
(Dept. of Math. and Phys., Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract An optimal boundary sequence method is introduced to find the weak efficient solution to a multi-objective optimization problem. The construction of the optimal boundary sequence and a correspondent algorithm are given. Calculation results of some examples show that the present method is of high efficiency and wide scope of application.
Key words multi-objective optimization; weak efficiency solution; optimal boundary sequence