

分形理论在含沙掺气水流脉动压力分析中的应用

黄细彬¹, 楼 雪²

(1. 河海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098 2. 东南大学电气工程系, 江苏 南京 210096)

摘要 简要介绍分维的定义和计算方法, 同时运用相空间重构法, 对含沙掺气水流脉动压力信号进行处理, 并计算浑水、清水、掺气三种不同水流状况的关联维数. 结果表明, 不同水流状况具有不同的关联维数, 含沙掺气水流运动并非完全随机, 而是具有内在有序性. 计算得出的不同关联维数反映出不同脉动压力信号序列所具有的不同分形特征, 说明动力形成机制、系统复杂程度的差异.

关键词 分形; 关联维数; 含沙掺气水流; 脉动压力

中图分类号 TV131.3 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2001)05-0080-04

分形(Fractal)一词来源于拉丁语 Fractus, 是由法国数学家曼德尔布罗持(B. B. Mandelbrot)^[1,2] 首先提出的, 它用来描述自然界中常见的表面看来变幻莫测的、不稳定的、不规则的, 而实际上潜在某种有序规律的几何实体或图形. 分形的最基本特征是自相似性、复杂性和不规则性. 分形维数是分形结构的不规则程度的定量表征, 不一定是整数. 分形的观点认为, 混沌现象产生于有序规律之中, 混沌不是杂乱无章的, 在所有表面的混沌现象的背后都隐藏着大小尺度不同的被称为分形基元的规律性结构, 分形基元由有序规则即某种非线性方程所控制, 而非线性正是产生混沌现象的根源. 流体运动的基本控制方程(Navier-Stokes 方程)是非线性方程, 紊流正是非线性失稳而引起的, 即是由层流转捩成的. 近年来的研究表明, 紊流在许多方面显示出分形特征. 紊流的 Kolmogorov 图像表现为大涡套小涡、小涡中再套更小的涡, 层层嵌套直至在极小的尺度上发生粘性耗散. 这一涡中有涡的层层嵌套结构是一种典型的自相似结构. 许多紊流问题都会产生分形结构. 如 Rayleigh-Benard 对流、Couette-Taylor 流动、螺旋式 Taylor 涡流及层流紊流交界面、紊流等速面和边界层外边缘^[3] 等等. 含沙掺气水流的多相流动是一个非线性的耗散的动力系统, 表现为一系列混沌运动, 混沌运动具有分形性质, 即混沌系统运动轨迹在相空间的几何形态可以用分形来描述, 而分形的特征可由分维来体现. 本文对含沙掺气水流壁面脉动压强的时间过程进行了测量处理, 运用相空间重构法计算其关联维数, 并进而由关联维数信息分析浑水、清水、掺气水流的紊动特性的差异.

1 分维的定义与计算

通常认为点是零维, 直线是一维, 平面是二维, 空间是三维, 时空是四维, 这种维数的定义是整数, 容易被理解. 但是把维数的概念推广到相空间, 研究混沌, 这个问题就要复杂得多, 一个奇异的吸引子的维数总是分数维的. 分形理论是用分维来描述广泛存在于自然界复杂、奇异的客观现象的, 由于所表示的具体对象的不同, 从不同角度出發, 可给出各种不同意义下的维数定义, 如相似维数、信息维数和关联维数等^[4]. 考虑 n 维相空间内的一个奇异吸引子. 设点集 $\{Y\}_i^N$ 是在奇异吸引子上一个很长时间序列的点集. 现在用 $M(r)$ 个大小为 r^n 的 n 维小单元体覆盖住这个点集 $\{Y\}_i^N$ 的所有点. 并设 $P_k = N_k/N$, 这里 N_k 是第 k 个小单元体内包含点集的个数. 于是广义维数 D_q 定义为

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sum_{k=1}^{M(r)} p_k^q)}{\ln r} \quad (q = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

当 $q = 0$ 时, 即为相似维数 D_0 ,

$$D_0 = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln M(r)}{\ln r} \tag{2}$$

当 $q \rightarrow 1$ 时,可得信息维数

$$D_1 = - \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I(r)}{\ln r} \tag{3}$$

其中 $I(r) = - \sum_{k=1}^{M(r)} p_k \ln p_k$ 是系统的总信息量.当 $q = 2$ 时,则可得关联维数

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sum_{k=1}^{M(r)} p_k^2)}{\ln r} \tag{4}$$

这里 $\sum_{k=1}^{M(r)} p_k^2$ 是在一个小单元体内出现奇异吸引子的 2 个点的概率,其值为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(\sum_{k=1}^{M(r)} p_k^2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \theta(r - |Y_i - Y_j|)\right) = \ln c(r) \tag{5}$$

其中 $c(r)$ 为积分关联, θ 是 Heaviside 函数或阶梯函数,表达式为

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \tag{6}$$

关联维数在实际问题中使用最多.如在具体实验中往往只测得一个物理量随时间变化的一组数据,运用关联维数的计算方法,根据这组数据很容易预测奇异吸引子的维数.含沙掺气水流是由无穷多个点构成的多相流体,不同点有着不同的运动轨迹,故其相空间应是无穷维的;但是另一方面决定其运动状态的基本参数只是有限的几个变量,也就是说,在很高维数的相空间中只组成有限维的空间对象.任一变量在发展过程中都隐藏着整个系统的运动信息,即通过求任一变量的演变过程的维数,可了解系统的奇异吸引子的特性.

考虑一个按等时间间隔 τ 测得的含沙掺气水流的壁面脉动压力信号的时间序列为

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_i, \cdots$$

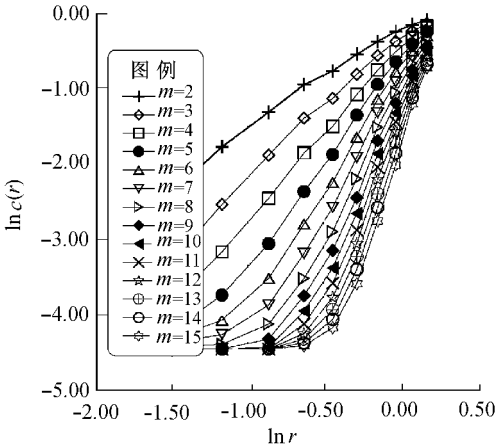
其中 x_i 是第 i 时刻测得的压力值.利用时间延滞的方法,引进一个可以用来完整描述系统奇异吸引子的嵌入空间,按间隔 τ 从上述的时间序列中取 m 个数,构成 m 维矢量,即

$$Y_i = (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+m-1}) \quad (i = 1, 2, \cdots) \tag{7}$$

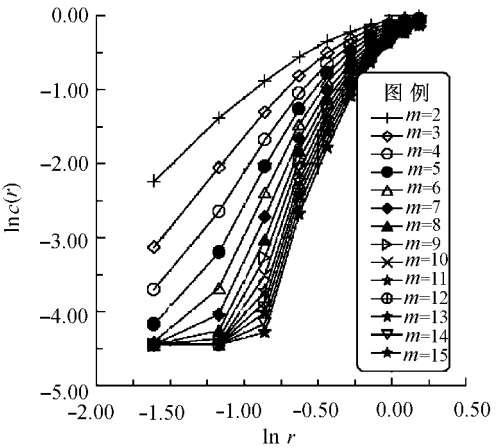
从时间序列中选取 N 个不同时刻的开始值,可构成 N 个 m 维矢量,即 N 个不同点,按照式(4)~(6)即可计算出关联维数 D_2 .关于时间间隔及嵌入维的选取可参阅文献[5].一般说来,要计算一个 D 维的奇异吸引子的维数,嵌入维数 m 最好选用比 $2D + 1$ 大的整数.只要 m 足够大,就可恢复原来的动力学系统.实际上,式(4),(5)的极限是不可能得到的.首先,因为所采集的数据有限, N 不可能太大,计算时只要 N 足够大即可;其次, r 不可能太小,因为压力信号含有一定的外界噪声,若 r 太小即已经低于噪声和测量误差造成的矢量差别,由式(4)算出的维数将不是关联维数;另外, r 也不能取得太大,若 r 太大,任何一对矢量都发生关联, $c(r)$ 将等于 1, $\ln c(r) = 0$,这样的 r 值不能反映系统的内部性质,没有意义.可见 r 的取值受到大小两端的限制.适当改变 r 值,若某一段 r 值区间内有 $c(r) = r^D$ 成立,则 D 就是关联维数 D_2 的一种逼近.在实际计算中,一般只作出 $\ln c(r) \sim \ln r$ 的关系图,求出每直线段的斜率.若随着 m 的增加可以得到逐渐收敛的 D_2 值,则表明动力系统只是表面混沌而隐藏着某种有序性,认为该动力系统具有分形特征,否则认为该动力系统是完全无序的,即不具有分形特征.

2 脉动压力的分形特性

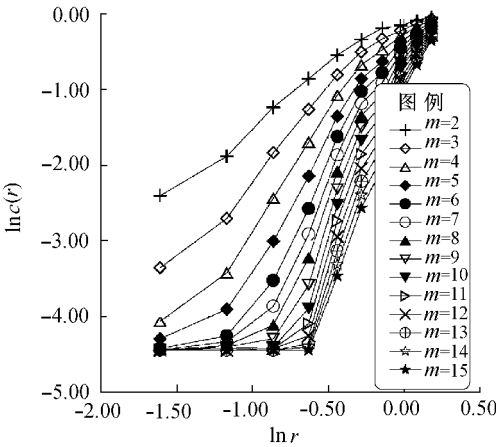
文献[6]曾对含沙掺气水流壁面脉动压力特性作了论述,分析了水、气、沙三相流体的压力脉动特性、幅值特性和频率特性,对功率谱类型进行了分类.本文则应用描述混沌运动的主要特征量(关联维数),对含沙掺气水流壁面脉动压力信号进行处理及计算,分析其所表现的紊动系统的动态特征.



(a) 掺气浓度 $C=5\%$



(b) 清水水流



(c) 含沙量 $S=20\text{ kg/m}^3$

图1 不同工况下 $\ln c(r)$ 与 $\ln r$ 的关系 (流速 $v=13\text{ m/s}$)

Fig.1 Relations between $\ln c(r)$ and $\ln r$ under different conditions (velocity $v=13\text{ m/s}$)

含沙掺气水流在不同工况所出现的复杂的运动现象,难以从机理上得到圆满的解释.借助于分形理论的一些工具对含沙掺气水流进行定性的描述,可说明不同工况所具有的不同分形特性.含沙掺气水流系统与一般动力系统一样,包含多个变量,各单变量的时间序列应当反映变量间的相互作用,包含系统信息.脉动压力时间序列的关联维数可反映整个多相流系统中的奇异吸引子的结构,说明该系统的复杂程度.

根据式(4)~(6),对含沙掺气水流壁面脉动压力的时间序列分别计算了嵌入维数 $m=2,3,4,\cdots,15$ 的关联维数.图1为计算所得的 $\ln c(r) \sim \ln r$ 的关系,图中 $\ln c(r)$ 与 $\ln r$ 关系中的直线段部分斜率即为关联维数值.

由图1可见,随着嵌入维数 m 的增大, $\ln c(r) \sim \ln r$ 关系的直线段部分的斜率逐渐增大,并趋于不变.这表示,关联维数 D_2 随着 m 的增大会逐渐增大至一确定值.图2所示为关联维数 D_2 随嵌入维数 m 的变化而变化的过程.图中显示,当 m 增大至一定值时, m 维空间内的图形不再出现结构的增加,流体的紊动也并非完全随机,但具有内在有序性.

计算得到,浑水(含沙量 $S=20\text{ kg/m}^3$)、清水、掺气水流(掺气浓度 $C=5\%$)系统的关联维数分别为6.2,5.9,7.5左右.由此不难看出,低含沙水流与清水系统的关联维数基本接近,而掺气水流与清水系统存在着较大差异,其关联维数比清水系统大,这反映了它们动力形成机制、系统复杂程度的不同.由此说明,掺气水流的紊流特征的描述要比清水、浑水系统复杂.

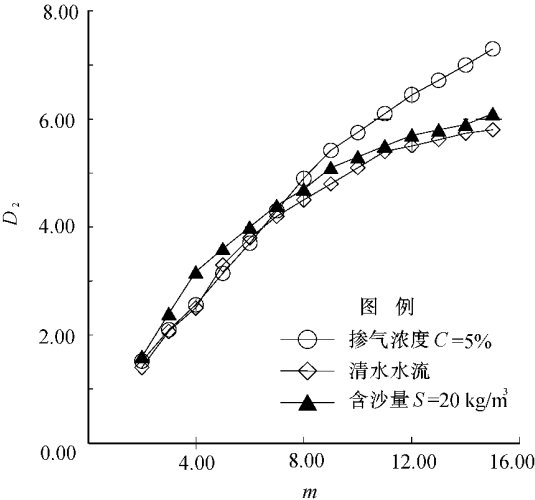


图2 关联维数 D_2 随嵌入维数 m 的变化 (流速 $v=13\text{ m/s}$)

Fig.2 Correlation dimension D_2 vs. embedded dimension m (velocity $v=13\text{ m/s}$)

3 结 语

分形理论的观点认为,一切复杂现象的背后存在着某种规律,分形研究的关键在于探索这种规律. 奇异吸引子是某些随机运动的原因,其分维数是随机运动复杂程度的度量. 本文依据分形理论,运用相空间重构法,分析计算了不同嵌入维数 m 时的含沙掺气水流脉动压力时间序列的关联维数 D_2 . 计算结果表明,随着嵌入维数的增大,无论是清水还是浑水、掺气水流,均可得到趋于一定值的关联维数. 这说明,含沙掺气水流紊动特征并非完全随机,但具有内在有序性及分形特征. 计算结果还表明,清水、浑水、掺气水流系统的关联维数有所不同,低含沙水流的关联维数与清水系统的较为接近,而掺气水流的关联维数比清水、浑水系统的大,因此对掺气水流紊流特征的描述更复杂.

参考文献：

[1] Mandelbrot B B. How long is the coast of Britain ?Statistical self-similarity and fractional dimension[J]. Science, 1967,156 :636 ~ 638.

[2] Mandelbrot B B. Intermittent turbulence in self-similar cascades, divergence of high moments and dimension of the carrier[J]. J Fluid Mech,1974,62 :331 ~ 358.

[3] Sreenivassan K R, Menevean C. The fractal facets of turbulence[J]. J Fluid Mech, 1986,173 :357 ~ 386.

[4] 是勋刚. 湍流[M]. 天津 天津大学出版社,1994. 248 ~ 249.

[5] Hao B L. Elementary symbolic dynamics and chaos in dissipative system[M]. New York :World Scientific, 1989.

[6] 黄细彬,袁银忠,王世夏. 含沙掺气高速水流壁面脉动压力特性[J]. 河海大学学报,1997, 25(5) :78 ~ 83.

Application of Fractal Theory to Analysis of Pressure
Fluctuations in Sediment-laden and Aerated Flow

HUANG Xi-bin¹, LOU Xue²

(1. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China ;
2. Electrical Project Department, Southeast Univ., Nanjing 210096, China)

Abstract : The definition and calculation of fractional dimension are introduced briefly. Fluctuating pressure signals from sediment-laden and aerated flow are processed by the reconstruction of phase space. The correlation dimensions are calculated for sediment-laden flow, clear water and aerated flow. The results show that the correlation dimensions vary with the flow conditions, and that sediment-laden aerated flows are not completely stochastic, but possess its intrinsic order. The difference in correlation dimension reflects the differences in fractal characteristics of different pressure fluctuation signal sequence, and indicates the differences in dynamical mechanism and degree of complexity of the system.

Key words : fractal ; correlation dimension ; sediment-laden and aerated flow ; fluctuating pressure