

Excel 软件在偏微分方程数值求解中的应用

劳 赛 夫

(河海大学水文水资源及环境学院,江苏 南京 210098)

摘要 基于二阶线性偏微分方程式的差分数值解法,推算出椭圆型、抛物型和双曲型三类偏微分方程的差分计算公式,计算程序表及所采用的 Excel 计算格式,并采用分别属于以上三类偏微分方程的三个水力学实例加以验证.结果表明,这种方法具有赋值精确、计算快速准确等优点.

关键词 Excel 工作表;二阶线性偏微分方程;差分格式;迭代法

中图分类号 O241.82 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2001)05-0110-05

Excel 软件具有强大的计算能力,计算时它可以利用工作表单元之间的相对位置来准确地复制公式和其它数据^[1].由于 Excel 工作表的计算空间非常大(256 列和 65 536 行)^[2]且便于迭代计算,所以它不仅能很快地计算水文学或水力学有关问题(如流量频率曲线、洪水过程线等),而且也可以计算其他较难的问题.下面以 3 个水力学实例来说明 Excel 工作表在线性偏微分方程式数值求解中的应用.

1 椭圆型偏微分方程式的实例

如图 1 所示的坐标原点 O 处有一抽水井.由于抽水井工作,使井附近的地下水位降落.令在域 $100 \leq x \leq 400$ 和 $0 \leq y \leq 300$ m 的底边、左边和顶边处的观测井中测得的水位如图 1 所示,试计算 R, S, T, U, V, W 点处的水头值,允许误差 $\epsilon \leq 0.01$ ^[3].

解 令地下水渗流的水头函数为 $h(x, y)$,则有^[4]

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

边界条件 第一类 $h(x, y) \Big|_{S_{ABCD}} = \bar{h}$ (已知)

第二类 $\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{S_{AD}} = U_x \Big|_{S_{AD}} = 0$

为了计算方便,将 y 轴移到域的左边界 y' 处,且 i, j 的序号从 1 开始.取网格的步长 $\Delta x = \Delta y = 100$ m.此时,节点 R, S, T, U, V, W 的函数值的计算采用高斯-赛德尔的差分迭代公式,即

$$h_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} (h_{i+1,j}^{(k)} + h_{i-1,j}^{(k)} + h_{i,j+1}^{(k)} + h_{i,j-1}^{(k)})$$

由于第二类边界条件,对于节点 T 和 W ,要假设 $h_{i+1,j}^{(k)} = h_{i-1,j}^{(k)}$.

现建立计算程序.打开 Excel 工作表后,必须按表 1 所示的格式来输入数据和公式.

表 1 说明第一次和第二次的计算公式.从第三次计算,只要把第二次的所有数据和公式都复制到下面,如此类推,一直到 $\epsilon \leq 0.01$ 为止.计算过程表明,从第三次计算只要迭代 8 次就可以达到 $\epsilon < 0.007$ 的结果,如表 2 所示.

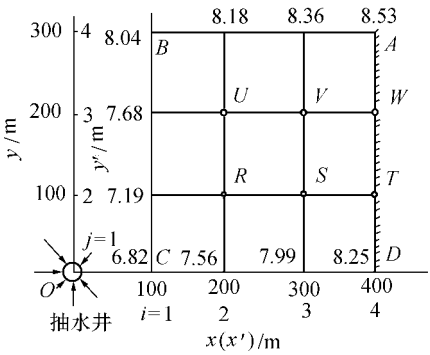


图 1 例题 1 的边界条件

Fig.1 Boundary conditions for problem 1

表 1 例题 1 的 Excel 程序

Table 1 Excel program for problem 1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	...	...	...	...	...	...	...	...
2	点号	$H_{i,j}^{(k)}$	$H_{i+1,j}^{(k)}$	$H_{i-1,j}^{(k+1)}$	$H_{i,j+1}^{(k)}$	$H_{i,j-1}^{(k+1)}$	$H_{i,j}^{(k+1)}$	ϵ
3	...	...	...	...	...	...	...	...
4	R	0	0	7.19	0	7.56	$= (C4 + D4 + E4 + F4) / 4$	$= ABS (G4 - B4)$
5	S	0	0	= G4	0	7.99	复制 G4	复制 H4
6	T	0	= G5	= G5	0	8.25		
7	U	0	0	7.68	8.18	= G4		
8	V	0	0	= G7	8.36	= G5		
9	W	0	= G8	= G8	8.53	= G6		
10	R	= G4	= G5	7.19	= G7	7.56		
11	S	复制 B10	= G6	= G10	= G8	7.99		
12	T		= G11	= G11	= G9	8.25		
13	U		= G8	7.68	8.18	= G10		
14	V		= G9	= G13	8.36	= G11		
15	W		= G14	= G14	8.53	= G12		

$\epsilon \leq 0.01$

表 2 第 8 次迭代后所算出的节点水头值

Table 2 Result of computation after the 8th iteration

点号	H_n	$H_{i+1,j}$	$H_{i-1,j}$	$H_{i,j+1}$	$H_{i,j-1}$	H_{n+1}	ϵ
R	7.6439	7.9501	7.1900	7.8988	7.56	7.6497	0.0058
S	7.9501	8.0868	7.6497	8.1015	7.99	7.9570	0.0069
T	8.0868	7.9570	7.9570	8.2049	8.25	8.0922	0.0054
U	7.8988	8.1015	7.6800	8.18	7.6497	7.9028	0.0040
V	8.1015	8.2049	7.9028	8.36	7.9570	8.1062	0.0047
W	8.2049	8.1062	8.1062	8.53	8.0922	8.2086	0.0037

2 抛物型偏微分方程式的实例

如图 2 所示,两无限平板的间距 $a = 1\text{ cm}$,其中充满运动粘滞系数 $\nu = 1\text{ cm}^2/\text{s}$ 的油. 当上平板作水平运动时,在 0.1 s 时间内速度由 0 线性地增加到 $u_0 = 10\text{ cm/s}$,其后以速度 u_0 作匀速运动,如图 3 所示. 试求两平板间的速度分布随时间的变化^[3].

解 本题说明速度 u 是随时间 t 和坐标 z 而变化的. 其变化规律归结为下面定解问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

初始条件： $u(z,0) = 0$

边界条件： $u(0,t) = 0 \begin{cases} u(l,t) = 10u_0t & 0 < t < 0.1 \\ u(l,t) = u_0 & t \geq 0.1 \end{cases}$

上面定解问题的显式差分解法如下：

- a. 将 z 轴分成 $m = 10$ 等份,取步长为 $h = 0.1\text{ cm}$,取时间步长为 Δt .
- b. 假设节点 (i,n) 处的速度 $u(z,t)$ 可用 $u_{i,n}$ 近似地表示,这时 $z = (i-1)h$ 而 $t = (n-1)\Delta t$.

其中 i 为位置坐标序号, n 为时层序号. 此时初始条件变为 $u_{i,1} = 0$,边

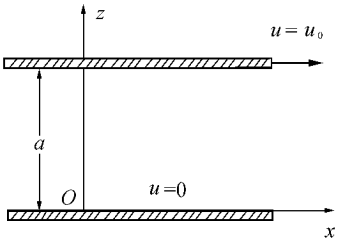


图 2 例题 2 的示意图

Fig.2 Schematic diagram of problem 2



图 3 速度 $u(x,t)$ 的变化曲线

Fig.3 Variation curve of $u(x,t)$

界条件变为

$$u_{1,n} = 0 \quad \begin{cases} u_{m+1,n} = 10u_0(n-1)\Delta t & 0 < n\Delta t < 0.1 \\ u_{m+1,n} = u_0 & n\Delta t = 0.1 \end{cases}$$

c. 把 $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 方程式的左端采用向前差分格式,右端采用中心差分格式,整理后得到时层 $n+1$ 内节点的速度为: $u_{i,n+1} = \frac{\nu\Delta t}{h^2}(u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n}) + u_{i,n}$. 令 $r = \frac{\nu\Delta t}{h^2}$, 为了保证得到稳定的数值解,要求 r 满足 $0 < r = \frac{\nu\Delta t}{h^2} < 0.5$. 假定 $r = 0.25$, 则 $\Delta t = \frac{0.25 \times 0.1}{1.0} = 0.0025$, 而时层 $n+1$ 内节点的速度变为

$$u_{i,n+1} = ru_{i+1,n} + (1-2r)u_{i,n} + ru_{i-1,n} \quad i = 2,3,\cdots,m, \quad n = 1,2,\cdots$$

由于假定 $r = 0.25$, 所以 $\Delta t = 0.0025$, 且当 $n = 40$ 时, $n \cdot \Delta t = 0.1$, 则从 $n = 41$ 起, $u_{m+1,n} = u_{11}, n \equiv 10.0$. 现建立计算程序. 打开 Excel 工作表后应按表 3 所示的格式来输入数据和公式.

表 3 例题 2 的 Excel 程序
Table 3 Excel program for problem 2

	A	B	C	D	E	...	K	L
1	...	...	...	...	...	...	...	...
2		1	2	3	4	...	10	11
3	...	...	...	...	...	...	...	...
4	1	0.00	0.00	0.00	0.00	...	0.00	0.00
5	2	0.00	= 0.25 * (D4 + B4) + 0.5 * C4	复制 C5	复制 C5	...	复制 C5	= 10 * 10 * A4 * 0.0025
...	...	...	...	...	...	...	...	...
44	41	0.00						10.0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
264	261	0.00						10.0

输入上面的数据后,把第 5 行的所有数值和公式都复制到下面,一直到输出数据达到稳定状态为止. 本题中,当 $n = 261$ 时,输出的数据已达稳定状态. 表 4 只显示了时间 $t = 20i + 1 (i = 0,1,2,\cdots,13)$ 时刻的输出结果.

表 4 例题 2 的计算结果
Table 4 Result of computation for problem 2

n	m										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
21	0.00	0.00	0.01	0.03	0.07	0.18	0.40	0.73	1.62	2.93	5.00
41	0.00	0.08	0.19	0.37	0.67	1.14	1.89	3.00	4.62	6.90	10.00
61	0.00	0.30	0.65	1.10	1.71	2.53	3.59	4.90	6.44	8.17	10.00
81	0.00	0.54	1.13	1.80	2.58	3.49	4.56	5.77	7.10	8.53	10.00
101	0.00	0.72	1.46	2.26	3.13	4.08	5.13	6.26	7.46	8.72	10.00
121	0.00	0.83	1.67	2.55	3.47	4.44	5.47	6.55	7.67	8.83	10.00
141	0.00	0.89	1.80	2.72	3.68	4.66	5.68	5.72	7.80	8.89	10.00
161	0.00	0.94	1.88	2.83	3.80	4.79	5.80	6.83	7.88	8.94	10.00
181	0.00	0.96	1.93	2.90	3.88	4.87	5.88	6.90	7.93	8.96	10.00
201	0.00	0.98	1.95	2.94	3.93	4.92	5.93	6.94	7.95	8.98	10.00
221	0.00	0.99	1.97	2.96	3.96	4.95	5.96	6.96	7.97	8.99	10.00
241	0.00	0.99	1.98	2.98	3.97	4.97	5.97	6.98	7.98	8.99	10.00
261	0.00	0.99	1.99	2.99	3.98	4.98	5.98	6.99	7.99	8.99	10.00

3 双曲型偏微分方程式的实例

试计算一维波动问题^[3], 基本方程式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

初始条件: $u(x, 0) = \sin \pi x (0 \leq x \leq l)$ $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$

边界条件: $u(0, t) = 0 \quad u(l, t) = 0 \quad t \geq 0$

解 典型一维波动方程式关于函数 $u(x, t)$ 的定解问题为:^[4]

基本方程式
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

初始条件 $u(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$

边界条件 $u(0, t) = g(t) \quad u(l, t) = q(t)$

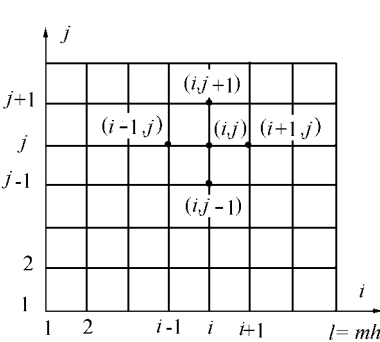


图 5 例题 3 的计算图

Fig.5 Computation for problem 3

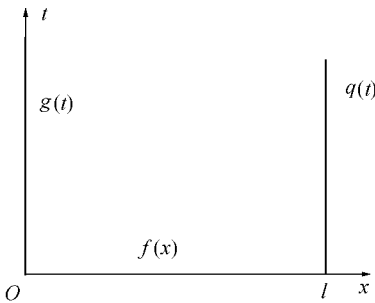


图 4 例题 3 的边界条件

Fig.4 Boundary conditions for problem 3

其中 c 是波速, l 是域的长度, 如图 4 所示.

这典型定解问题的直接差分解法如下:

a. 将 x 轴分成 m 等份, t 轴分成 n 等份. 假设 h 为 x 的步长, k 为 t 的步长.

b. 若节点 (i, j) 处的 u 值用 $u_{i,j}$ 表示, 且 i, j 的序号从 1 开始, 则有 $x = (i - 1)h, t = jk$, 如图 5 所示. 其中 $i = 1, 2, \cdots, m + 1; j = 1, 2, \cdots, n$. 初始条件变为

$$\begin{cases} u_{i,1} = f_i \\ \frac{1}{k}(u_{i,2} - u_{i,1}) = 0 \Rightarrow u_{i,2} = u_{i,1} \end{cases} \quad i = 2, 3, \cdots, m$$

边界条件变为
$$\begin{cases} u_{1,j} = g_j \\ u_{m+1,j} = q_j \end{cases} \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

c. 若对基本方程式两端都用中心差分格式表示, 整理后并令 $r = \frac{c^2 k^2}{h^2}$, 则内节点函数的差分计算公式为

$$u_{i,j+1} = ru_{i+1,j} + 2(1 - r)u_{i,j} + ru_{i-1,j} - u_{i,j-1} \quad i = 2, 3, \cdots, m \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

本题 $c = 1.0, f(x) = \sin \pi x, g(t) = 0, q(t) = 0$. 假定 $r = 0.25, m = 8, n = 10, l = 10$, 则有 $2(1 - r) = 1.50, h = l/m = 10/8 = 1.25, k = \sqrt{rh^2/c^2} = 0.625$.

初始条件变为

$$\begin{cases} u_{i,1} = \sin[3.14159(i - 1)h] \\ u_{i,2} = u_{i,1} \end{cases}$$

边界条件变为
$$\begin{cases} u_{1,j} = 0 \\ u_{m+1,j} = 0 \end{cases}$$

现建立计算程序. 打开 Excel 工作表后按表 5 所示的格式来输入数据和公式.

表 5 例题 3 的 Excel 程序

Table 5 Excel program for problem 3

	A	B	C	D	...	H	I	J
1	...	...	...	...	...	...	...	...
2		1	2	3	...	7	8	9
3	...	...	...	...	...	...	...	...
4	1	0.00000	= SIN(3.14 * (C2 - 1) * 1.25)	复制 C4	...	...	...	0.0000
5	2	0.00000	= C4	复制 C5	...	...	...	0.0000
6	3	0.00000	= 0.25 * (B5 + D5) + 1.5 * C5 - C4	复制 C6	...	...	...	0.0000
14	11	0.00000	...	...	...	...	...	0.0000

输入以上数据后,把 C 列的 3 个公式复制到 $D \sim I$ 列,然后把第 6 行的所有数据都复制到下面,一直到 $j = n + 1$ 行为止,如表 6 所示.

表 6 例题 3 的计算结果
Table 6 Result of computation for problem 3

j	i								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.0000	-0.7071	1.0000	-0.7071	0.0000	0.7071	-1.0000	0.7071	0.0000
2	0.0000	-0.7071	1.0000	-0.7071	0.0000	0.7071	-1.0000	0.7071	0.0000
3	0.0000	-0.1036	0.1464	-0.1036	0.0000	0.1036	-0.1464	0.1036	0.0000
4	0.0000	0.5884	-0.8321	0.5884	0.0000	-0.5884	0.8321	-0.5884	0.0000
5	0.0000	0.7781	-1.1004	0.7781	0.0000	-0.7781	1.1004	-0.7781	0.0000
6	0.0000	0.3037	-0.4295	0.3037	0.0000	-0.3037	0.4295	-0.3037	0.0000
7	0.0000	-0.4300	0.6081	-0.4300	0.0000	0.4300	-0.6081	0.7300	0.0000
8	0.0000	-0.7966	1.1266	-0.7966	0.0000	0.7966	-1.1266	0.7966	0.0000
9	0.0000	-0.4833	0.6835	-0.4833	0.0000	-0.4833	-0.6835	0.4833	0.0000
10	0.0000	0.2425	-0.3430	0.2425	0.0000	-0.2425	0.3430	-0.2425	0.0000
11	0.0000	0.7613	-1.0767	0.7614	0.0000	-0.7613	1.0767	-0.7613	0.0000

4 结 语

从 3 个例题可以看出,利用差分格式求解二阶线性偏微分方程式时,由 Excel 工作表编制的程序要比 FORTRAN 或其它计算语言的程序更简单,且计算速度也很快.除了偏微分方程以外,Excel 软件还可以计算其它类型的问题.

参考文献：

[1] 张群英,姜如海.Excel 97 中文版使用指南[M].北京:清华大学出版社,1998.86~104.
[2] 汤斌浩.Excel 97 中文版自学教程[M].北京:清华大学出版社,1998.2~3,54~63.
[3] 林继镠.微机计算水力学[M].天津:天津大学出版社,1990.57~58,67~68,73~74.
[4] 熊洪允,曾昭标,毛云英.应用数学基础(下册)[M].天津:天津大学出版社,1994.236~242,248~254,261~264.

Application of Microsoft Excel to Numerical Calculation
of Partial Differential Equations

NZEYIMANA JOSEPH

(College of Water Resources and Environment, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract The numerical method is used to solve the second order linear partial differential equations (PDE), and the use of the microsoft excel in solving the equations is introduced. Three hydraulic problems of the elliptic type, the parabolic type, and the hyperbolic type of PDE are chosen and calculated in this paper. In each problem, the differential and iterative form of calculation, the program table, and excel formulae are deduced. The calculated results are satisfactory.

Key words Excel worksheet; second order linear PDE; differential form; iterative method