

基于 Taylor 展开的分步有限元格式

江春波, 杜丽惠, 张庆海

(清华大学水利水电工程系, 北京 100084)

摘要 描述了一种基于 Taylor 展开的分步有限元数值格式, 该法在时间上进行分步计算, 在空间上采用标准的 Galerkin 有限元格式. 对该数值格式的稳定性分析表明, 该法在时间和空间上均具有三阶精度, 数值稳定性好, 在库朗数 $0 \sim 1$ 的范围内均收敛. 相比于 Taylor-Galerkin 法, 本有限元法不包含高阶微分项, 适用于非线性多维问题及具有复杂边界形状的流动. 该法具有计算简便、精度高、数值稳定性好等优点.

关键词 分步有限元法 稳定性分析 对流扩散方程

中图分类号: TV131.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000-1980(2001)06-0099-04

有限元法适用于求解具有复杂边界形状的流动. Navier-Stokes (N-S) 方程和对流扩散方程由于非线性对流项的存在, 而使空间离散格式成为非线性非对称的形式, 而常规的有限元法实质上是一种中心格式, 当对流项较强时, 如果有限元网格不适当, 在数值解中就会出现振荡失真. 为消除这种振荡失真, 可以采用加密有限元网格的途径, 但这势必会增加计算机的内存和计算量, 往往是不经济的. 这时人们就计算格式本身提出了各种解决方法, 如迎风有限元法.

迎风有限元法的基本思想是在加权函数中采用考虑上游效应的不对称权函数, 其中 SUPG (Stream-line Upwind/Petrov-Galerkin) 法^[1]精度较高; Taylor-Galerkin 有限元法^[2]将对流扩散方程分解为对流方程和扩散方程两部分, 将对流部分在时间展开至二阶, 再结合标准的 Galerkin 有限元空间离散. 这种格式稳定性较好, 且提高了计算精度, 相比于 SUPG 法, 不必修改自由参数. 但 Taylor-Galerkin 有限元法在时间上只有二阶精度, 为了取得稳定性的数值解, 计算时间步长必须较小, 即库朗数 Cr 必须小于 $1/\sqrt{3}$. 另一种再如 Lax-Wendroff 有限元格式^[3], 其出发点是在对流项中以空间导数代替 Taylor 展开式中的时间导数, 而三阶精度的 Taylor-Galerkin 有限元法具有更大的稳定域^[2], 但由于高阶微分项的存在而使得数值离散和边界处理比较困难, 特别是在求解非线性多维问题时, 这种困难尤其显著. 目前还没有见到应用三阶的 Taylor-Galerkin 法求解 Navier-Stokes 流动文献^[4,5].

基于 Taylor 展开的思想, 又不至于出现高阶微分项, 本文提出了一种新的有限元格式, 该法时间上分为三步, 空间上采用标准的 Galerkin 空间离散. 由于不必计算高阶微分项, 故适于求解非线性多维问题. 通过精度及稳定性分析, 得到该法具有三阶精度和更大的稳定域, 在库朗数 $0 \sim 1$ 的范围内均收敛. 分析中采用了纯对流方程, 为了显示分步有限元法的精度, 给出了直观的算例, 表明了该格式的适用性.

1 分步有限元数值格式

考虑对流扩散方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[k \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] + S_f \quad (1)$$

式中: f ——浓度; u_j ——速度; k ——扩散系数; S_f ——源项. 在时步上进行 Taylor 展开, 有

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t \frac{\partial f(t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 f(t)}{\partial t^3} + O(\Delta t^4) \quad (2)$$

收稿日期 2000-10-30

基金项目 国家自然科学基金项目 (59979013)

作者简介 江春波 (1960—), 男, 吉林吉林人, 副教授, 主要从事计算流体力学方面的研究.

如果把式(2)分解成两步：

$$f(t + \frac{\Delta t}{2}) = f(t) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f(t)}{\partial t} \quad f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t \frac{\partial f(t + \Delta t/2)}{\partial t} \quad (3)$$

空间离散采用标准的 Galerkin 有限元法,这就得到了两步 Lax-Wendroff 有限元格式. 这种格式计算对流较强流动问题是稳定的,并有较高的精度,但是还不具备一致 CFL 条件(即库朗数 C_r 小于 1). 如果把式(2)分解成三步：

$$\left. \begin{aligned} f(t + \frac{\Delta t}{3}) &= f(t) + \frac{\Delta t}{3} \frac{\partial f(t)}{\partial t} & f(t + \frac{\Delta t}{2}) &= f(t) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f(t + \Delta t/3)}{\partial t} \\ f(t + \Delta t) &= f(t) + \Delta t \frac{\partial f(t + \Delta t/2)}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

空间离散仍采用标准的 Galerkin 有限元法,这就是本文提出的新有限元格式,它保留了 Taylor-Galerkin 模式的优点,如三阶精度,同时又具备一致 CFL 条件,即在库朗数等于 1 时也能收敛. 该法具有精度高、稳定性好和计算简便之特点,与 Taylor-Galerkin 法相比,不包含任何新的高阶微分项,可用于解决非线性多维流动问题. 以纯对流方程为例,分析分步有限元法的精度及稳定性,并与两步 Lax-Wendroff 及 Taylor-Galerkin 有限元格式相比较.

2 稳定性分析

先以一维纯对流方程 $\frac{\partial f}{\partial t} + u_j f_j = 0$ 为例,对两步 Lax-Wendroff 格式和本文的有限元格式分别进行稳定性分析,比较各种格式的的稳定条件,结果如下.

两步 Lax-Wendroff 有限元法具有二阶精度且稳定条件为

$$C_r \leq 1/\sqrt{3} \quad (5)$$

本文的有限元法具有三阶精度,且分步有限元法对于 $C_r = 1$ 也是稳定的,稳定区间明显大于两步 Lax-Wendroff 格式. 三维情况下的数值稳定性分析比较复杂,实际进行分析的很少. 由于本文提出的有限元模式的优点之一是求解多维问题,因此有必要针对三维情况下进行数值稳定性分析.

对于三维纯对流方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \alpha_x \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

其中 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ 为 x, y, z 方向上的流速. 应用 Galerkin 有限元法得

$$\sum_e \iint_{\Omega^e} \Phi_a \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \alpha_x \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) dx dy dz = 0 \quad (7)$$

由此可得到三维放大因子和格式精度,下面简要给出主要结论.

二步 Lax-Wendroff 有限元格式的放大因子

$$G = (1 - \frac{1}{2} Y^2) - iY \quad (8)$$

本文分步有限元格式的放大因子

$$G = (1 - \frac{1}{2} Y^2) - i(Y - \frac{1}{6} Y^3) \quad (9)$$

参数 Y 定义为

$$Y = \{C_{rx}f(\xi) + C_{ry}f(\eta) + C_{rz}f(\xi)\} \quad (10)$$

其中

$$C_{rx} = \frac{\Delta t \alpha_x}{h_x} \quad C_{ry} = \frac{\Delta t \alpha_y}{h_y} \quad C_{rz} = \frac{\Delta t \alpha_z}{h_z}$$

$$f(\xi) = \frac{\sin \xi}{1 - \frac{2}{3} \sin^2(\xi/2)} \quad f(\eta) = \frac{\sin \eta}{1 - \frac{2}{3} \sin^2(\eta/2)} \quad f(\xi) = \frac{\sin \xi}{1 - \frac{2}{3} \sin^2(\xi/2)}$$

式中 h_x —— x 方向的计算步长; C_{rx} —— 对应的 x 方向的库朗数.

对于二维情况,参数 Y 定义为

$$Y = \{C_{rx}f(\xi) + C_{ry}f(\eta)\}$$

(11)

图 1 绘出了分步格式和两步格式的稳定域,虚线为两步的 Lax-wendroff 格式的稳定区域,实线为本文提出的格式的 stable 域,可见在二维和三维情况下本文的有限元格式都具有更大的稳定域。

3 算 例

为了检验本文分步有限元法的精度,求解纯对流方程：

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -u_j f_j$$

(12)

取流速分布为涡旋流场：

$$u_1 = -x_2 \quad u_2 = x_1$$

(13)

式中： x_1 —— x 方向坐标值； x_2 —— y 方向坐标值； u_1 —— x 方向流速； u_2 —— y 方向流速。

定义污染物在涡旋流速度中随水流输移 2π 角时刻为“旋转一周”；用 z 方向高度来等比例的表示污染物浓度,起始状态的污染物浓度分布类似于“山”的形状。计算结果如图 2 所示,对于二步有限元格式,当集中质量矩阵代替均匀质量矩阵之后,则结果类似于 Lax-Wendroff 有限差分格式。图 2(b)表示出由集中质量有限元法得到的结果,时间步长为 0.0157 s。第一周的振荡约为山高的 25%,由于振荡增长得很快,在第二周以后根本得不到解。图 2(c)表示出了由非集中质量矩阵得到的结果,采用雅可比迭代法解有限元方程,明显提高了精度,为得到稳定解,仍采用较小时间步长。一周后山脚下的振荡约为山高的 7%。对于分步有限元法采用了相对较大的时间步长,一周后的计算结果见图 2(d),表明三步有限元法对于较大的时间步长是稳定的,山的形状基本类似于小步长的二步格式。由此可见,三步有限元法的精度明显优于两步法,且稳定性更好。

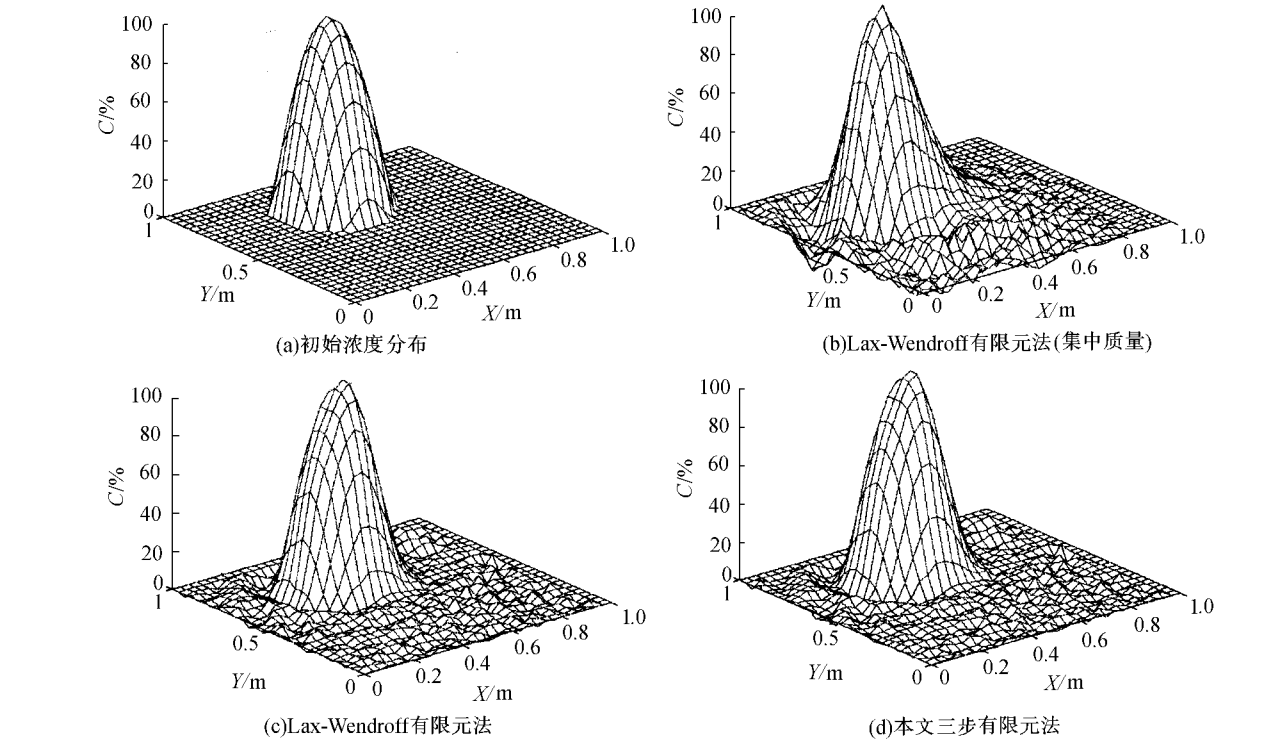


图 2 旋转一周后“山”的形状
Fig.2 "Mountain" shape after a full rotation

4 结 论

本文提出的分步有限元法在时间上以分步形式逼近台劳展开的高精度项,空间上采用标准的 Galerkin 有限元格式.通过在三维情况下的精度及稳定性分析,表明该法在时间和空间方向上均具有三阶精度,比 Lax-Wendroff 格式具有更大的稳定域,在库郎数 $C_r = 0 \sim 1$ 的范围内均收敛.与 Taylor-Galerkin 有限元格式相比,本格式不包含高阶微分项,所以适用于非线性多维问题极其具有复杂边界形状的流程.

参考文献:

- [1] Brooks A N, Hughes T J R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations[J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 1982, 32 : 199 ~ 259.
- [2] Donea J. A Taylor-Galerkin method for convection transport problems[J]. Int J Numer Methods Eng, 1984, 20 : 101 ~ 119 .
- [3] Kawahara M. Convergence of finite element Lax-Wendroff method for linear hyperbolic differential equation [A] . Proc JSCE [C], 1976, 253 : 95 ~ 107.
- [4] Jiang C B, Kawahara M, Kashiyma K. A Taylor-Galerkin-based finite element method for turbulent flows [J] . Fluid Dynamic Research, 1992, 9 : 165 ~ 178.
- [5] Hawken D M, Townsend P, Webster M F. A finite element simulation of viscous flow around a cylinder[A] . Proc Int Conf on Numerical Methods in Engineering : Theory and Applications [C], 1990, 955 ~ 962.
- [6] Gresho P M, Chan S T, Lee R L, *et al.* A modified finite element method for solving the time-dependent, incompressible Navier-Stokes equations, Part 1 : Theory [J] . Int J Numerical Methods in Fluids, 1984, 4 : 557 ~ 598.

A Fractional Step Finite Element Method Based on Taylor Expansion —Stability and Accuracy Analysis

JIANG Chun-bo, DU Li-hui, ZHANG Qing-hai

(Dept. of Hydraulics, Tsinghua Univ., Beijing 100084, China)

Abstract : A fractional step finite element method based on Taylor expansion theory is proposed for unsteady flows, by which time discretization is carried out in 3 steps and spatial discretization is done by the conventional Galerkin method. The stability and accuracy analysis for one dimensional and multi-dimensional pure convection problem is made. The results show that the present method is of third order accuracy and is stable for Courant Number $0 \sim 1$. Compared with the Taylor-Galerkin method, the present method has no higher order derivative terms and is suitable for nonlinear multi-dimensional flow problems.

Key words : fractional step finite element method ; stability analysis ; convection-diffusion equation