

关于芬纳公式的修正

任青文, 张宏朝

(河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 根据隧洞施工期和运行期不同的受力情况, 导出深埋隧洞塑性区不同的芬纳公式, 确定无限大匀质体中轴对称圆洞的塑性范围, 并给出公式的适用条件. 对算例的结果进行了芬纳公式修正前后的比较.

关键词 隧洞 塑性 芬纳公式 修正

中图分类号 :TV672⁺.1 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2001)06-0109-03

芬纳公式、修正的芬纳公式和卡斯特纳公式^[1,2]给出了无限大匀质体中轴对称圆形隧洞塑性圈范围与材料抗剪强度、初始地应力和洞内周边匀布荷载的关系. 这一公式在隧洞工程中得到相当广泛的应用, 可以用它来估计地下隧洞的塑性区, 确定隧洞内部需要支护的压力, 分析洞壁产生的位移等. 但是在以往文献^[3,4]中, 公式的推导与洞内周边的匀布荷载大小、塑性区产生的原因无关. 实际上, 由于塑性屈服条件 Mohr-Coulomb 准则以主应力表示时, 对于不同的洞内压力, 第一主应力可能是径向应力, 也可能是环向应力. 因此, 对不同荷载, 隧洞分析所采用的芬纳公式应有不同的表达形式.

1 隧洞开挖及支护

在有地应力(压应力)情况下, 隧洞的开挖卸荷产生应力重分布, 使隧洞围岩产生塑性区. 对于匀质各向同性岩中的深埋圆形隧洞(图 1), 假定地应力为 p_0 , 内压为 p , 侧压力系数为 1, 隧洞无限长, 凝聚力 c 和内摩擦角 ϕ 为常数, 则隧洞的弹塑性分析可视为轴对称问题. 设隧洞开挖的内径为 r_1 , 塑性区的范围为小于 r_p 的环形区, 先分析塑性区的应力.

不计体力时, 轴对称问题的平衡微分方程为

(1)
$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

环形塑性区内的屈服条件采用 Mohr-Coulomb 准则

(2)
$$\tau_t = c - \sigma_n \tan \phi$$

应力以拉为正, 式(2)若以主应力表示(设 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), 则为

(3)
$$(1 + \sin \phi) \sigma_1 - (1 - \sin \phi) \sigma_3 = 2c \cos \phi$$

此时, $\sigma_1 = \sigma_r, \sigma_3 = \sigma_\theta$, 代入上式, 可得

(4)
$$(1 + \sin \phi) \sigma_r - (1 - \sin \phi) \sigma_\theta = 2c \cos \phi$$

将其代入式(1), 得

(5)
$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2\sigma_r \sin \phi}{r(1 - \sin \phi)} = - \frac{2c \cos \phi}{r(1 - \sin \phi)}$$

求出方程(5)的解, $\sigma_r = c \cot \phi + c_1 r^{1 - \sin \phi}$, 代入边界条件 $(\sigma_r)_{r=r_1} = -p$, 解出 c_1 得

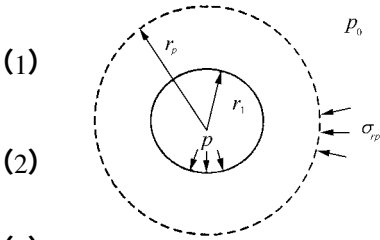


图 1 圆形隧洞弹塑性区

Fig.1 Elastic-plastic range of circular tunnel

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= c \cot \phi - (p + c \cot \phi) \left(\frac{r}{r_1} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} \\ \sigma_\theta &= c \cot \phi - \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} (p + c \cot \phi) \left(\frac{r}{r_1} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

以上为环形塑性区内的应力. 对于弹性区 ($r \geq r_p$) 内的应力和位移, 可根据弹性力学中的拉密解答给出. 设 $r = r_p$ 处的应力为 σ_{rp} , 远处地应力为 p_0 , 则有

$$\sigma_r = -\frac{r_p^2}{r^2} \sigma_{rp} - \left(1 - \frac{r_p^2}{r^2}\right) p_0 \quad \sigma_\theta = \frac{r_p^2}{r^2} \sigma_{rp} - \left(1 + \frac{r_p^2}{r^2}\right) p_0 \quad (7)$$

可见, $\sigma_r + \sigma_\theta = -2p_0$, 该式在 $r = r_p$ 处亦成立, 将其代入式(4), 有

$$\sigma_r = c \cos \phi - p_0 (1 - \sin \phi) \quad (8)$$

它与式(6)中 $(\sigma_r)_{r=r_p} = \sigma_{rp}$ 相等, 由此解得

$$\frac{r_p}{r_1} = \left[\frac{(p_0 + c \cot \phi) (1 - \sin \phi)}{c \cot \phi + p} \right]^{\frac{1 - \sin \phi}{2 \sin \phi}} \quad (9)$$

这就是通常的芬纳公式, 以往均以此确定弹塑性交界面的位置.

2 运 行 期

对于水工压力隧洞, 运行期洞壁将承受内水压力. 当内水压力很大时, 洞周岩体也可能形成塑性区. 此时, 内水压力可视为均匀压力, 仍为轴对称问题. 但应用 Mohr-Coulomb 屈服准则时, 由于径向压应力较大, 环向压应力较小, 甚至成为拉应力, 所以第一主应力应为 σ_θ , 即 $\sigma_\theta \geq \sigma_r$. 令 $\sigma_1 = \sigma_\theta, \sigma_3 = \sigma_r$ 则式(4)成为

$$(1 + \sin \phi) \sigma_\theta - (1 - \sin \phi) \sigma_r = 2c \cos \phi \quad (10)$$

代入式(1), 得

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\sigma_r \sin \phi}{r(1 + \sin \phi)} = \frac{2c \cos \phi}{r(1 + \sin \phi)} \quad (11)$$

边界条件为 $(\sigma_r)_{r=r_1} = -p$, 解出

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= c \cot \phi - (p + c \cot \phi) \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-\frac{2 \sin \phi}{1 + \sin \phi}} \\ \sigma_\theta &= c \cot \phi - \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} (p + c \cot \phi) \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-\frac{2 \sin \phi}{1 + \sin \phi}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

以上为环形塑性区内的应力. 对于弹性区 ($r \geq r_p$) 内的应力和位移, 与前面类似, 由拉密解答, 可得出与式(7)相同的弹性区应力, 且同样有 $\sigma_r + \sigma_\theta = -2p_0$. 该式在 $r = r_p$ 处亦成立, 将其代入式(10)得

$$\sigma_r = -c \cos \phi - p_0 (1 + \sin \phi) \quad (13)$$

它与式(12)中的 $(\sigma_r)_{r=r_p}$ 相等, 由此解出

$$\frac{r_p}{r_1} = \left[\frac{(p_0 + c \cot \phi) (1 + \sin \phi)}{c \cot \phi + p} \right]^{\frac{1 + \sin \phi}{2 \sin \phi}} \quad (14)$$

3 结 论 及 适 用 条 件

用于分析轴对称深埋隧洞塑性区大小的芬纳公式(9)具有局限性, 只能用于因开挖卸荷引起且支护压力不大时的塑性区分析. 对于因运行期高内压产生的塑性区, 原芬纳公式不适用, 应修正为式(14). 因此, 分析轴对称深埋隧洞塑性区的公式应包括(9)和(14)两个, 这两个公式的适用条件如下.

开挖产生塑性区的条件可根据式(9)得到. 只有当(9)中方括号内的值大于 1, 才能使 r_p/r_1 大于 1, 出现塑性区. 这就要求

$$p \leq p_0 (1 - \sin \phi) - c \cos \phi \quad (15)$$

同样, 成洞后施加内压时出现塑性区的条件可根据式(14)得到. 此时要求(14)中方括号内的值小于 1, 那么内压 p 就必须满足

$$p \geq c \cos \phi + p_0 (1 + \sin \phi) \quad (16)$$

4 算 例

圆形隧洞围岩的凝聚力为 $c = 1\text{MPa}$, $\phi = 45^\circ$, 地应力 $p_0 = 10\text{MPa}$. 将这些数据代入式(15)得 $p \leq 2.23\text{MPa}$, 若代入式(16)得 $p \geq 17.78\text{MPa}$. 这就是说,隧洞开挖(此时 $p = 0$)或支护压力小于 2.23MPa 时,肯定会因卸荷而产生塑性区. 塑性区的范围由式(9)求出. 只有在施加支护压力,且支护压力的值大于 2.23MPa 时,才能消除塑性区. 当内水压力太大,超过 17.78MPa 时,又会出现因内压造成的塑性区. 此时,塑性区大小由公式(14)确定. 图 2 实线示出塑性区半径与洞半径之比随洞内压力 p 的变化情况. 若采用原芬纳公式,则变化规律如虚线所示. 它表示不管 p 多大,都不会出现塑性区,显然是不合理的.

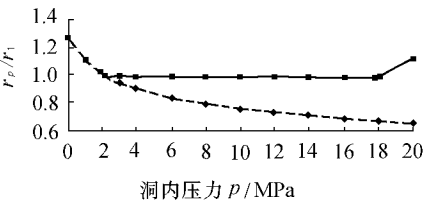


图 2 隧洞塑性区范围与洞内压力关系

Fig.2 Relation between plastic range and inner pressure of circular tunnel

参考文献：

[1] 肖树芳,杨淑碧. 岩体力学[M]. 北京 地质出版社,1987. 119 ~ 125.
[2] 重庆建筑工程学院,同济大学. 岩体力学[M]. 北京 中国建筑工业出版社,1981. 127 ~ 136.
[3] 郑雨天. 岩石力学的弹塑粘性理论基础[M]. 北京 煤炭工业出版社,1988. 235 ~ 247.
[4] 刘长武,褚秀生. 软岩巷道全断面锚注加固的力学原理与应用[J]. 工程力学,2000, (5) :131 ~ 138.

A Modification of Fenner Formula

REN Qin-wen, ZHANG Hong-chao

(College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract : In consideration of different loading conditions during the construction and operation of a tunnel, different forms of the Fenner formula and the conditions for application for different plastic ranges are derived to determine the plastic ranges of axially symmetric circular tunnels in infinite homogeneous bodies. A comparison of the calculation results by the modified Fenner formula and the original Fenner formula is also made.

Key words : tunnel ; plasticity ; Fenner formula ; modification