平面应变状态混凝土等效单轴应变本构模型研究

汪基伟[1],朱　虹[2],王　红[3]

(1.河海大学土木工程学院,江苏 南京　210098;2.长江水利委员会设计院,湖北 武汉　430010;
3.乌江水电集团公司,贵州 贵阳　550000)

摘要:推导了平面应变状态下的等效单轴应力-应变关系.以应力-应变曲线试验值与计算值的误差达到最小为目标,反演出双向受压时相应于强度值的等效单轴应变值,并回归得到其计算公式;同时对一拉一压、双向受拉及一向开裂、双向开裂等受力状况提出了 ε_{ic} 的计算方法;经对现有强度理论的分析比较,选择了适合平面应变状态的强度准则,从而得到了平面应变状态混凝土等效单轴应变本构模型.

关键词:混凝土;本构模型;平面应变状态;等效单轴应变
中图分类号:TU37　　文献标识码:A　　文章编号:1000-1980(2002)01-0006-05

随着钢筋混凝土有限单元法的发展与成熟,它逐渐被工程设计人员所接受,并在实际工程中得到应用.水工混凝土结构设计规范(DL/T5057—1996)已规定了采用钢筋混凝土有限单元法进行非杆系结构配筋设计的一般原则,标志着钢筋混凝土有限单元法已成为非杆系结构配筋设计的方法之一.因此,对钢筋混凝土有限单元法开展进一步研究是十分有意义的.

混凝土本构模型是钢筋混凝土非线性有限元分析的基础.目前建立混凝土本构模型的理论主要有弹性非线性理论、弹塑性理论、粘弹性和粘塑性理论、损伤力学理论、内时理论等,其中弹性非线性理论和弹塑性理论应用较广.

在弹性非线性本构模型中,较常用的是文献[2]提出的等效单轴应变模型,如 CEB-FIP 模式规范就建议采用此本构模型进行有限元分析.但由于文献[2]中的等效单轴应变计算公式是根据平面应变状态的试验结果得出的,而且弹性力学中的平面应力状态和平面应变状态之间的转换关系不适用于进入非线性范围的混凝土结构[3],因而文献[2]提出的等效单轴应变模型仅适用于平面应力问题.而在水利工程中大量的结构只能简化为平面应变问题处理,因此对平面应变状态下的等效单轴应变模型进行研究是十分必要的.

1　平面应变状态下的混凝土应力-应变关系

1.1　混凝土未裂及未屈服时的应力-应变关系

将混凝土视为正交各向异性体,根据广义虎克定律,平面应变状态下的应力-应变关系可表示为

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Omega}\begin{bmatrix} E_1(1-\mu_{32}\mu_{23}) & E_1(\mu_{13}\mu_{32}+\mu_{12}) & 0 \\ E_2(\mu_{31}\mu_{23}+\mu_{21}) & E_2(1-\mu_{13}\mu_{31}) & 0 \\ E_3(\mu_{21}\mu_{32}+\mu_{31}) & E_3(\mu_{31}\mu_{12}+\mu_{32}) & 0 \\ 0 & 0 & \Omega G_{12} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{1}$$

其中

$$\Omega = 1-\mu_{21}\mu_{12}-\mu_{31}\mu_{13}-\mu_{32}\mu_{23}-\mu_{12}\mu_{23}\mu_{31}-\mu_{21}\mu_{32}\mu_{13}$$

式中:$d\sigma_i$,$d\tau_{ij}$——本级荷载在上一级荷载作用后的主应力方向上引起的应力增量;$d\varepsilon_i$,$d\gamma_{ij}$——相应的应变增量;E_i——上一级荷载作用后,主应力 i 方向上的切线弹性模量;μ_{ij}——j 方向受力对 i 方向所引起的泊松比;G_{ij}——上一级荷载作用后,主应力 i,j 平面上的切线剪切模量,可由下式计算[4]:

收稿日期:2000-05-31
基金项目:教育部"高等学校骨干教师资助计划"项目;江苏省"333 工程"资助项目
作者简介:汪基伟(1962—),男,浙江安吉县人,教授,博士,主要从事钢筋混凝土结构研究.

$$G_{ij} = E_iE_j/[E_i(1+\mu_{ij}) + E_j(1+\mu_{ji})] \tag{2}$$

将式(1)中的前三式展开,并引入等效单轴应变的概念,得

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= \frac{E_1}{\Omega}[(1-\mu_{32}\mu_{23})d\varepsilon_1 + (\mu_{13}\mu_{32}+\mu_{12})d\varepsilon_2] = E_1 d\varepsilon_{1u} \\ d\sigma_2 &= \frac{E_2}{\Omega}[(\mu_{31}\mu_{23}+\mu_{21})d\varepsilon_1 + (1-\mu_{31}\mu_{13})d\varepsilon_2] = E_2 d\varepsilon_{2u} \\ d\sigma_3 &= \frac{E_3}{\Omega}[(\mu_{21}\mu_{32}+\mu_{31})d\varepsilon_1 + (\mu_{31}\mu_{12}+\mu_{32})d\varepsilon_2] = E_3 d\varepsilon_{3u} \end{aligned} \tag{3}$$

式中:$d\varepsilon_{iu}$——等效单轴应变增量;ε_{iu}——等效单轴应变,

$$\varepsilon_{iu} = \sum \Delta\sigma_i / E_i \tag{4}$$

从等效单轴应变 ε_{iu} 的定义可知,ε_{iu} 不是混凝土的真实应变,而是一个计算标量. 根据 Darwin 的假定,等效单轴应变 ε_{iu} 与应力 σ_i 之间的关系可由单轴应力-应变关系表示,本文采用的单轴应力-应变关系为[4]

$$\sigma_i = \frac{E_0\varepsilon_{iu}}{1 + (R + E_0/E_s - 2)(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic}) - (2R-1)(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic})^2 + R(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic})^3} \tag{5}$$

其中
$$R = E_0\left(\frac{\sigma_{ic}}{\sigma_{if}} - 1\right) / \left[E_s\left(\frac{\varepsilon_{if}}{\varepsilon_{ic}} - 1\right)\right] - \frac{\varepsilon_{ic}}{\varepsilon_{if}}$$

式中:σ_i——主应力;E_0——原点切线弹性模量;E_s——相应于强度值 σ_{ic} 的割线模量,$E_s = \sigma_{ic}/\varepsilon_{ic}$;$\varepsilon_{ic}$——相应于强度值 σ_{ic} 的等效单轴应变;σ_{if},ε_{if}——曲线下降段某点的坐标值.

根据等效单轴应变的定义,即 $E_i = \dfrac{d\sigma_i}{d\varepsilon_{iu}}$,对式(5)微分即可得主应力方向的切线弹性模量,即

$$E_i = E_0 \frac{1 + (2R-1)(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic})^2 - 2R(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic})^3}{[1 + (R + E_0/E_s - 2)(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic}) - (2R-1)(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic})^2 + R(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic})^3]^2} \tag{6}$$

式(1)中 j 方向受力对 i 方向所引起的泊松比 μ_{ij} 可由下式计算[4]:

$$\mu_{ij} = \sqrt{\mu_{iu}\mu_{ju}E_j/E_i} \qquad \mu_{ij} \leqslant 0.5 \tag{7}$$

其中
$$\mu_{iu} = \mu[1 + 1.3763(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic}) - 5.360(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic})^2 + 8.586(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic})^3] \tag{8}$$

式中:μ——泊松比.

1.2　混凝土开裂后的应力-应变关系

本文采用片状裂缝模型. 片状裂缝模型是以在一个区域内均匀分布和互相平行的微细裂缝来代替单一的裂缝. 它假定当单元内某一代表点(如高斯积分点)的某一向主应力超过了混凝土的抗拉强度,此点所代表的那部分区域就在与此主应力垂直的方向上开裂成无数微小的平行裂缝. 开裂后的混凝土仍可视为连续体,但开裂方向的弹性模量和应力增量由于混凝土开裂而变为零. 为了模拟开裂单元仍具有传递剪力的能力,将剪切模量取为 βG,其中 G 为混凝土的剪切弹性模量,β 为考虑裂缝对抗剪能力影响的修正系数.

当 $\sigma_1 > f_t$ 时,σ_1 方向开裂,这时

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Omega}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & E_3\mu_{32} & 0 \\ 0 & 0 & \Omega\beta G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{9}$$

其中
$$\Omega = 1 - \mu_{32}\mu_{23}$$

在 σ_1 方向混凝土已开裂的情况下,随着荷载的增加,仍可能 $\sigma_2 > f_t$,此时应力-应变关系变为

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{10}$$

式(9)和式(10)中的系数 β 可表示为

$$\beta = \beta_1\beta_2 \tag{11}$$

其中 β_1 和 β_2 为分别考虑两个方向裂缝开展影响的修正系数,可按下式计算:

$$\beta_i = \begin{cases} 0.4\varepsilon_{it}/\varepsilon_{iu} & \varepsilon_{iu} > \varepsilon_{it} \\ 1.0 & \varepsilon_{iu} \leqslant \varepsilon_{it} \end{cases} \tag{12}$$

式中:ε_{it}——i 方向混凝土达到抗拉强度时的应变;ε_{iu}——i 方向的等效单轴应变.

当混凝土出现裂缝后,裂缝处混凝土的拉应力降为零,但两裂缝之间的混凝土仍能承担一定的拉应力,它随着裂缝的开展而减小,这一现象称为混凝土受拉劲化.为使裂缝模拟更符合实际,需考虑这一现象的作用.这时,开裂向拉应力 σ_i 可按下式计算:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{it} < \varepsilon_{iu} < 4\varepsilon_{it}\ \text{时} && \sigma_i = \sigma_{ic}(4\varepsilon_{ic} - \varepsilon_{iu})/(3\varepsilon_{ic}) \\ &\varepsilon_{iu} > 4\varepsilon_{it}\ \text{时} && \sigma_i = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

1.3 混凝土屈服后的应力-应变关系

当 $\varepsilon_{2u} > \varepsilon_{2c}$时,$\sigma_2$ 方向屈服,这时 σ_2 方向的弹性模量和应力增量等于零,混凝土的应力-应变关系可表示为

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Omega}\begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ E_3 v_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_1 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{14}$$

其中 $$\Omega = 1 - v_{31}v_{13}$$

当 $\varepsilon_{2u} > \varepsilon_{2c}$后,随荷载增加又出现 $\varepsilon_{1u} > \varepsilon_{1c}$,即两个方向同时屈服,混凝土的应力-应变关系变为

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{15}$$

而屈服向应力 σ_i 由下式计算:

$$\sigma_i = \sigma_{ic} + (0.2\sigma_{ic} - \sigma_{ic})(\varepsilon_{iu} - \varepsilon_{ic})/(3\varepsilon_{ic}) \tag{16}$$

当 ε_{2u}大于混凝土的极限压应变,即混凝土被压碎时,混凝土的应力-应变关系同样采用式(15)表示.

2 平面应变状态下强度值 σ_{ic}所对应的等效单轴应变的确定

2.1 双向受压时 ε_{ic}值的确定

强度值 σ_{ic}和其所对应的等效单轴应变ε_{ic}值是本构模型中的重要参数,直接关系到本构模型是否正确.本文根据文献[3]的试验结果,以平面应变状态下双向受压应力-应变曲线计算值与试验值的误差达到最小为目标,来反演强度值所对应的等效单轴应变值 ε_{ic}.反演方法为:

a. 由等效单轴应变的定义知,ε_{ic}应稍大于试验曲线上强度值所对应的应变值,由此可确定 ε_{ic} 的范围:($\varepsilon_{1c}^1 \sim \varepsilon_{1c}^2$),($\varepsilon_{2c}^1 \sim \varepsilon_{2c}^2$)和($\varepsilon_{3c}^1 \sim \varepsilon_{3c}^2$).

b. 将 ε_{ic}的范围 n 等分,得到 n^3 组(ε_{1c},ε_{2c},ε_{3c})值.

c. 对每一组(ε_{1c},ε_{2c},ε_{3c})值,根据式(1)、式(2)和式(4)~(8)可计算得到一条应力-应变曲线.

d. 对每条计算曲线,求其和试验曲线之间的误差 $T = \sum_{j=1}^{n}(\Delta\varepsilon_{1j})^2 + \sum_{j=1}^{n}(\Delta\varepsilon_{2j})^2$,并寻找误差 T 的最小值,则误差 T 最小值所对应的(ε_{1c},ε_{2c},ε_{3c})值就为所要求的 ε_{ic}.其中 $\Delta\varepsilon_{1j}$和 $\Delta\varepsilon_{2j}$分别表示σ_1 和 σ_2 方向应变计算值与试验值的差,j 表示在曲线上选取的第 j 计算点.

计算结果表明,不同的 ε_{ic}值组合时,误差 T 大小不同.当 ε_{1c},ε_{2c}和ε_{3c}分别增大时,误差 T 逐渐减小;当ε_{1c},ε_{2c}和ε_{3c}达到一定值后,T 达到最小,随后 T 又随着 ε_{1c},ε_{2c}和 ε_{3c}值的增大而增大,这说明按上述方法可以得到最优的 ε_{ic}值.表 1 列出了不同应力比 α 对应的 $\varepsilon_{ic}/\varepsilon_0$ 值,其中 ε_0 为单轴应力-应变曲线强度值所对应的应变.

表 1　$\varepsilon_{ic}/\varepsilon_0$ 的反演值与回归公式计算值

Table 1　Values of $\varepsilon_{ic}/\varepsilon_0$ from inverse analysis and by Eq.17

应力比	$\varepsilon_{1c}/\varepsilon_0$			$\varepsilon_{2c}/\varepsilon_0$			$\varepsilon_{3c}/\varepsilon_0$		
α	反演值	计算值	误差/%	反演值	计算值	误差/%	反演值	计算值	误差/%
0.05	0.43	0.44	2.3	2.19	2.37	8.2	6.19	6.23	0.6
0.10	0.81	0.75	-7.4	3.81	3.68	-3.4	9.05	9.10	0.5
0.15	1.24	1.26	1.6	5.90	5.40	-8.5	12.86	12.51	-2.7
0.25	7.70	9.10	18.1	11.90	13.18	10.8	23.09	23.56	2.0

在回归 ε_{ic} 计算公式时,首先根据 $\alpha \sim \varepsilon_{ic}$ 曲线的形状,选择指数函数作为回归模型,并应用最小二乘法回归得到 $\alpha \sim \varepsilon_{ic}$ 曲线表达式,再将其改写为以 α 为自变量的表达式:

$$\frac{\varepsilon_{1c}}{\varepsilon_0} = \frac{-0.7475}{\ln\alpha + 1.3041} \qquad \frac{\varepsilon_{2c}}{\varepsilon_0} = \frac{-4.6700}{\ln\alpha + 1.0320} \qquad \frac{\varepsilon_{3c}}{\varepsilon_0} = \frac{-13.6270}{\ln\alpha + 0.8081} \tag{17}$$

表 1 列出了式(17)的计算值及与反演值的误差,其误差是较小的.

2.2　拉-压及双向受拉时 ε_{ic} 值的确定

从文献[3]知,当混凝土处于拉-压受力状态时,在混凝土开裂之前应力-应变曲线基本为线性,此时可按线性材料计算;当混凝土开裂后,受力状态变为以 σ_2 和 σ_3 方向为平面的平面应力问题,此时 ε_{ic} 值可按文献[2]中的有关公式计算.

当混凝土两向受拉时,和文献[2]类似,ε_{ic} 值可按下式计算:

$$\varepsilon_{ic} = \sigma_{ic}/E_0 \tag{18}$$

3　强度准则的选取

至今,已提出了为数不少的强度准则.这些强度准则基于不同试验范围,采用不同的曲线形式和参数,其适用范围各有不同.本文利用文献[3]和文献[5]的试验结果对几个常见破坏准则[6~10]进行比较,以选择一个适合平面应变状态的强度准则.

在双向受压状态,文献[6]~[10]准则的计算结果和试验结果误差最大值分别为 19.7,7.8,17.0,11.9 和 39.2,因此选择文献[7]的准则作为本文的强度准则,其表达式为

$$\tau_0 = a\left(\frac{b-\sigma_0}{c-\sigma_0}\right)^d \tag{19}$$

其中

$$c = c_t(\cos 1.5\theta)^\alpha + c_c(\sin 1.5\theta)^\beta$$

$$\sigma_0 = \sigma_{oct}/f_c = (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/(3f_c)$$

$$\tau_0 = \tau_{oct}/f_c = \sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}/(3f_c)$$

式中:σ_{oct},τ_{oct}——八面体正应力和八面体剪应力;f_c——混凝土轴心抗压强度;θ——相似角.

在拉-压受力状态,文献[6]~[10]准则的计算结果和试验结果误差均较大.而文献[11]中的公式和试验结果符合较好,最大误差为 15%,其表达式为

$$\sigma_3/f_c = 1/(1.0-14.0\alpha) \qquad \sigma_1 = \alpha\sigma_3 \tag{20}$$

对双向受拉状态,可采用

$$\sigma_{ic} = 0.9f_t \tag{21}$$

4　算　　例

根据本文提出的混凝土本构模型,对文献[3]中应力比 $\alpha = 0.15$ 的试验进行计算,计算曲线(点划线)和试验曲线(实线)的比较见图 1.同时采用文献[2]提出的模型对同一试验进行计算,计算曲线也列于图 1 中(虚线).

从图 1 可知,用本文提出的公式计算得到的曲线与试验曲线符合良好,说明本文提出的公式是合适的;

而用文献[2]模型得到的强度值比试验值低许多，说明在计算平面应变问题时若采用文献[2]模型就会低估混凝土的抗压强度，不利于发挥混凝土的作用.从图1还可以看到，当试验曲线还处于线性范围时，文献[2]模型得到的曲线已进入非线性区，说明在计算平面应变问题时采用文献[2]模型会低估结构的弹性模量，不能正确地反映结构的实际应力状态.

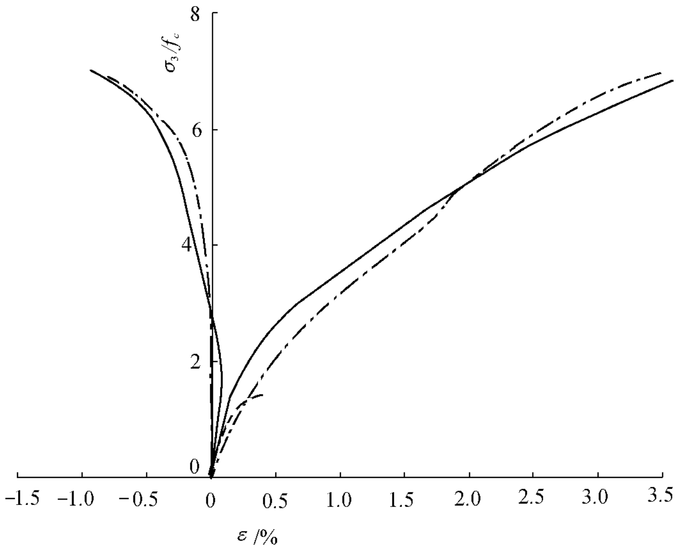

图1 计算曲线与试验曲线的比较

Fig.1 Comparison of calculated curves with test results

5 结 论

a. 以应力-应变曲线的实测值与计算值的误差达到最小为目标，来反演强度值所对应的等效单轴应变值 ε_{ic} 是十分有效的，本文给出的 ε_{ic} 计算公式是合理的.

b. 本文提出的平面应变状态等效单轴应变本构模型能较好地反映平面应变状态下混凝土的实际受力特性，而文献[2]的本构模型仅适用于平面应力状态，若用于分析平面应变问题将引起较大误差.

参考文献：

[1] 电力工业部西北勘测设计研究院.DL/T5057—1996 水工混凝土结构设计规范[S].北京:中国水利水电出版社，1997.176～178.

[2] Darwin D，Pecknold D A. Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete[J]. ASCE，1977，103(EM2):229～241.

[3] 宋玉普，赵国藩，靳国礼，等.平面应变状态下的混凝土变形和强度特性[J].水利学报，1990(5):22～29.

[4] Balan T A. Constitutive model for 3D cyclic analysis of concrete structures[J]. ASCE，1997，123(EM2):143～153.

[5] 宋玉普，赵国藩.拉压平面应变状态下混凝土的强度准则[J]. 大连理工大学学报，1997(1A):105～109.

[6] Ottosen N S. A failure criterion for concrete[J]. ASCE，1977，103(EM4):527～535.

[7] 过镇海，王传志.多轴应力下混凝土强度和破坏准则研究[J].土木工程学报，1991(3):1～14.

[8] 周氏，康清梁，童保全.钢筋混凝土基本理论[M].上海:上海交通大学出版社，1989.116～118.

[9] 康清梁.一个五参数的混凝土破坏准则[J].河海大学学报，1993，21(3):21～24.

[10] 彭放.复杂应力状态下多种混凝土材料的破坏准则及本构关系模型研究[D].大连理工大学，1990.

[11] 过镇海.混凝土的强度和变形[M].北京:清华大学出版社，1997.165～166.

Equivalent Uniaxial Constitutive Model of Concrete in Plane Strain

WANG Ji-wei[1]，ZU Hong[2]，WANG Hong[3]

(1. *College of Civil Engineering*，*Hohai Univ.*，*Nanjing* 210098，*China*；

2. *Changjiang Water Resources Commission*，*Wuhan* 430010，*China*；

3. *Wujiang Water and Electricity Company*，*Guiyang* 550000，*China*)

Abstract: A relation of equivalent uniaxial stress-strain of concrete in plane strain is derived. Based on the minimization of difference between calculated and test results，the equivalent uniaxial strain corresponding to strength under pressures in two directions is calculated and its regression equations are given. A method is proposed for calculation of ε_{ic} under the conditions of tension-compression，tension in two directions，cracking in one direction，and cracking in two directions. After a comparison of current strength theories，a strength criterion for the plane strain state is selected，and an equivalent uniaxial constitutive model for concrete in plane strain is developed.

Key words: concrete；constitutive model；plane strain state；equivalent uniaxial strain