

R/S 分析法在地下水动态分析中的应用

黄 勇,周志芳,王锦国,王军辉

(河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 对 R/S 分析法中的 Hurst 经验公式进行了修正,并采用修正后的 Hurst 经验公式分析了地下水动态过程.实例表明,采用 R/S 分析法对地下水动态过程进行分析是合理的,修正后的 Hurst 经验公式可以更加广泛地应用于时间序列的分析.同时采用 R/S 分析法定量描述了地下水动态过程的分形特征,得到了其分维数.

关键词 地下水动态; R/S 分析;时间序列;分形

中图分类号 P641.2 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2002)01-0083-05

地下水动态是指地下水与环境相互作用下,含水层各要素随时间的变化,包括地下水水位、水化学特征、水量、水温等,它是通过一系列长期观测资料反映出来的.通过对地下水动态的分析、预测和控制,可以为水利、矿山等工程以及人们的日常生活提供服务.目前,处理这类长期观测资料的随机模型主要有回归分析法、频谱分析法、随机微分方程等.然而,这些方法都未能很好地揭示地下水动态过程的分形特征.对于这类非线性的具有统计特性的数据系列,采用域重新标度分析法(简称 R/S 分析),可以很好地揭示地下水动态过程的内在规律性及其分形特征,从而有效地对其变化规律进行预报和控制.

R/S 分析法是英国学者 H. E. Hurst 于 1965 年提出的一种处理时间序列的方法,Hurst 本人曾利用此法对河流流量、泥浆沉积量、树木年轮、降雨量等许多自然现象研究过.同时,该方法在其它领域(如物理、生物学等)也得到了广泛的应用.本文以地下水水位、水化学特征为例,采用 R/S 分析法对地下水动态过程进行了分析,得到了令人满意的结果. R/S 分析是自仿射分形衍生出来的时间序列分析方法,进而可以借助分形理论对地下水动态的分形特征进行定量描述.

1 基本原理

1.1 R/S 分析法原理(随机模型的建立)

R/S 分析的基本思想是,改变所研究对象的时间尺度的大小,研究其统计特性变化规律,从而可以将小尺度的规律用于大的时间尺度范围,或者将大的时间尺度得到的规律用于小尺度.其基本原理如下.

设在时刻 $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$ 处取得的相应时间序列为 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_N$, 该时间序列的时间跨度为

$$\tau = t_N - t_1$$

在时间 τ 内,该时间序列的平均值

$$\langle \xi \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i$$

式中 N 为时间序列的长度.在 t_j 时刻,物理量 ξ 相对于其平均值 $\langle \xi \rangle_N$ 的累积偏差

$$X(t_j, N) = \sum_{i=1}^j \xi_i - \langle \xi \rangle_N$$

其中 $X(t, N)$ 不仅与 t 有关,而且还与 N 的取值(即时间序列的范围)有关.每一个 N 值对应一个 $X(t, N) \sim t$ 序列,不同的 N 值有不同的 $X(t, N) \sim t$ 序列.把同一个 N 值所对应的最大 $X(t)$ 值和最小 $X(t)$ 值之差称为域,并记为 R ,

$$R(t_N - t_1) = R(\tau) = \max X(t, N) - \min X(t, N) \quad t_1 \leq t \leq t_N$$

Hurst 利用的标准偏差

$$S = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^N \xi_i - \langle \xi \rangle_N \right)^2)^{1/2} \quad t_1 \leq t \leq t_N$$

引入无量纲的比值 R/S ,对 R 进行重新标度,即

$$\frac{R}{S} = \frac{\max X(t, N) - \min X(t, N)}{\left(\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^N \xi_i - \langle \xi \rangle_N \right)^2)^{1/2}}$$

Hurst 利用上式对河流流量、泥浆沉积量、树木年轮、降雨量等许多自然现象进行研究后,发现大多数自然现象的记录结果满足经验公式

$$R/S = (\tau/2)^H \tag{1}$$

式(1)中的 H 称为霍斯特指数, $H \sim 0.72$, H 的标准偏差约为 0.09.

1.2 时间序列 R/S 分析的分维数

为了便于理解,有必要对分形的有关概念作一说明,把在不同方向上具有不同标度因子的变换称为仿射变换. 经过仿射变换后的图形与原图形相似则称之为自仿射分形. 即满足关系式

$$F(br) = b^F F(r) \tag{2}$$

式中: F ——标度变换因子,其值介于 0~1 之间; b ——比例因子,是大于零的实数; r ——时间尺度,通过 b 的变化能够任意改变其大小.

对时间序列的 R/S 分析结果,比值 R/S 是与所选取的时间范围有关的量,定义

$$T(t) = R/S \sim t^H \tag{3}$$

用因子 b 改变时间的尺度,联系式(3),得

$$T(bt) \sim (bt)^H \sim b^H t^H \sim b^H T(t) \tag{4}$$

比较式(2)知,式(4)就是时间序列 R/S 分析的标度特征. 这里的霍斯特指数 H 就相当于时间变换的标度因子 F ,因此时间序列 $T(t)$ 具有自仿射性,经过严格的数学推导^[1],可知时间序列 $T(t)$ 的毫斯道夫维数亦即盒维数

$$D = 2 - H \tag{5}$$

式(5)表示时间序列记录结果 $T(t)$ 的标度变换因子 H 与分形维数 D 的关系.

1.3 对霍斯特经验公式的修正

R/S 分析将霍斯特指数 H 与分形维数 D 联系起来,通过分维数刻画事物的内在本质,其中 H 起联系纽带的作用. 对霍斯特经验公式(1)两边取常用对数得

$$\lg(R/S) = H(\lg \tau - \lg 2)$$

以 $\lg(R/S)$ 为纵坐标轴,以 $\lg \tau$ 为横坐标轴,其图形在双对数坐标中为一簇斜率为 H ,过定点 $(\lg 2, 0)$ 的直线. 然而对于某些自然现象(研究对象)而言,不仅 H 值不同,而且描述其本质特征的 $\lg(R/S) \sim \lg \tau$ 直线也并不一定过定点 $(\lg 2, 0)$,而是随具体研究对象确定. 即霍斯特经验公式中的常数 1/2 应是一个不确定的量. 因此,不妨将其用字母 c 表示,在这里可以将 c 理解为自然现象的固有特性,它反映自然现象本身的性质. 于是霍斯特经验公式可以改写为

$$R/S = (c\tau)^H \tag{6}$$

式中 c 表示不依赖于 H 的变量,为自然现象的固有特性,式(6)即为修正后的霍斯特经验公式. 对式(6)两边取常用对数得 $\lg(R/S) = H(\lg \tau + \lg c)$,在双对数坐标 $\lg(R/S) \sim \lg \tau$ 中, H 表示直线的斜率, $\lg c$ 表示在 $\lg \tau$ 轴上的截距. 当 $c = 1/2$ 时,就退化为霍斯特经验公式.

笔者用修正后的霍斯特经验公式对许多实例进行了计算,分析发现, $H \sim 0.86$. 修正后的霍斯特经验公式可以更广泛地应用于时间序列分析中.

2 实 例 应 用

把地下水水位 $H(t)$ 、水质 $Q(d)$ 看成随机变量,即 $H(t) \sim (t)$, $Q(d) \sim (t)$. 用修正后的经验公式对其

进行计算,并将计算结果表示在双对数坐标中,则其直线的斜率为 H ,截距为 $\lg c$. 将所得的 H 代回式(5),即可求出序列的分形维数 D .

2.1 某城市地下水位动态分析

图 1 为某城市地下水位与时间的关系曲线^[3],其长达 130 a 的水位连续记录显示了地下水水位动态变化. 若以每年测得的平均水位记录作一时间序列 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \cdots, \xi_N$,则可用 R/S 分析法进行分析. 先取前 50 a 的观测资料,经过计算机计算,将所得的一系列 $\lg(R/S), \lg \tau$ 值在双对数坐标中进行拟合,从而可得到直线的斜率和截距(图 2(a)). 改变时间尺度, N 分别取 100 a 和 130 a, R/S 分析模拟的结果见图 2(b)(c).

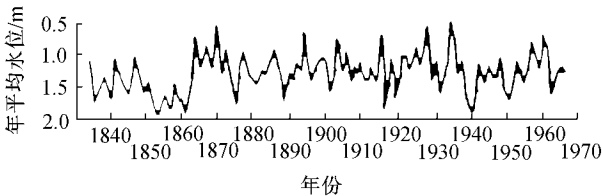


图 1 列宁格勒城地下水位随时间变化曲线(据 Э. А. Зальцберг, 1980)
Fig.1 Groundwater table vs. time for Leningrad (According to Э. А. Зальцберг, 1980)

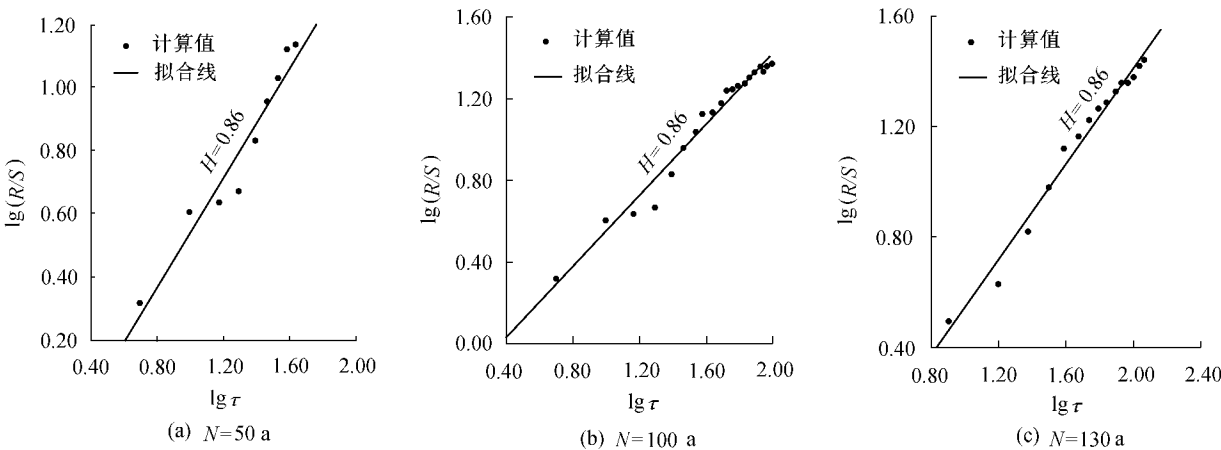


图 2 地下水位的 R/S 分析结果
Fig.2 R/S analysis results of groundwater table

标准均方差反映了 H 的离散程度,标准均方差都很小,其值约为 0.07,表明 $\lg(R/S) \sim \lg \tau$ 直线与计算值拟合得较好. 从图 2 可以看出,随着时间尺度的增加,直线的斜率 H 无变化,这说明 R/S 分析法能很好地适用于地下水位动态分析. 同时,可将上述三种情形的有关参数作一比较,其结果见表 1. 其中因子 b 的物理意义表示以年限 N 等于 50 为基准,其它年限(包括 $N = 50$)与之相比的值. c 值反映了地下水位变化的固有特性,随 N 的增加而略有变化,对这类具有统计特性的研究对象,无法在小样本条件下得到确定值;分维数 D 由 H 确定,因 H 值较稳定,故 D 也变化不大,其值约为 1.14. 分维数 D 定量地描述了地下水水位动态所具有的分形特征,可以看出,该城市地下水位变化过程的分维数平均值为 1.141.

2.2 某钻孔中地下水化学成分(锌) 动态分析

图 3 是某钻孔地下水中锌含量与地层深度的关系曲线^[4],若每隔 1 m 作为一个实测点,从距地表 30 m 处开始记录,随着深度的增加,可以得到一系列锌含量值,其记录结果实际上就是一个时间序列. 注意这里的时刻(每米)和时间序列实际上是广义的,因此同样适用于 R/S 分析法. 从该图中可以直观地看出,锌含量随深度变化剧烈涨落,其图形具有明显的自相似性,通过 R/S 分析结果,计算出霍斯特指数,从而证实了这一点,

表 1 N 取不同值时有关参数的变化值

Table 1 Related parameters vs. N					
时间尺度 /a	H	c	标准均 方差	分维数 D	比例因子 b
50	0.858	0.426	0.079	1.142	1.0
100	0.862	0.426	0.071	1.138	2.0
130	0.856	0.428	0.057	1.144	2.6
平均	0.859	0.427	0.069	1.141	

如图 4(a). 同样, 可利用已有的实测资料改变时间尺度, 分别取地层深度 d 为 100 m, 120 m, 其 R/S 分析结果见图 4(b) (c).

对地下水化学成分的 R/S 分析发现, H 值随着 d 值的增大而略有变化, 但是能够肯定, 随着样本的增加, 会得到更加精确的 H 值, 其模拟的精度也会相应地提高. 将三种不同尺度情况下计算的有关参数列于表 2. 此处的比例因子 b 表示以地层深度 80 m 为基准, 其它深度与之相比的值. 在表 2 中, c 值反映了钻孔中锌随深度变化的固有特性; 分维数 D 变化不大, 其值约为 1.13, 定量地描述了钻孔水化学成分所具有的分形特征.

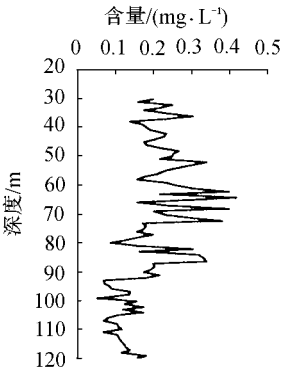


图 3 锌含量随深度的变化曲线
Fig.3 Zinc content vs. depth

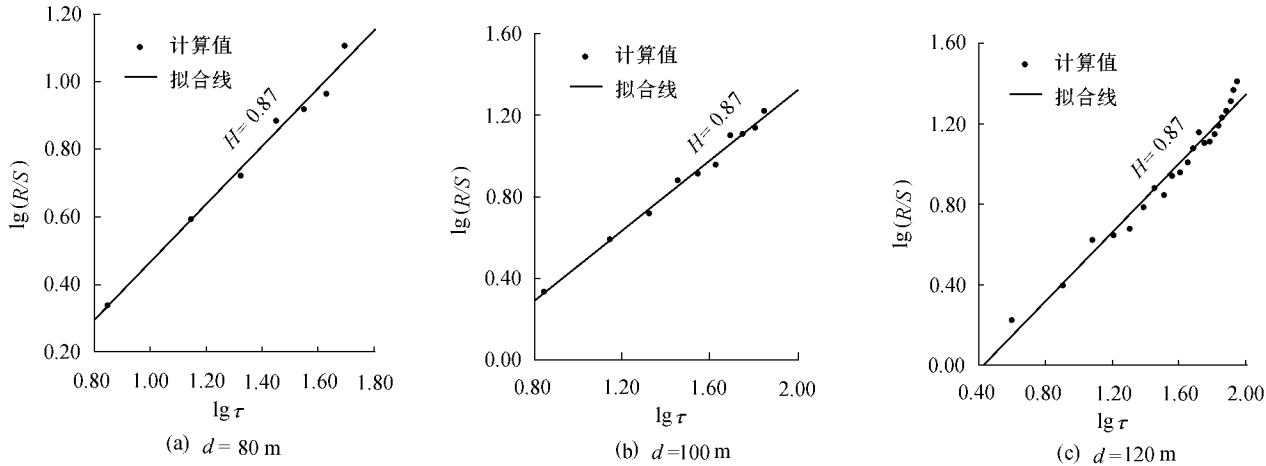


图 4 锌含量的 R/S 分析结果
Fig.4 R/S analysis results for zinc content

表 2 d 取不同值时有关参数值
Table 2 Related parameters vs. d

地层深度 d/m	H	c	标准均 方差	分维数 D	比例因子 b
80	0.869	0.345	0.078	1.131	1.0
100	0.871	0.342	0.076	1.129	1.4
120	0.868	0.370	0.082	1.132	1.8
平均	0.869	0.353	0.079	1.131	

3 结 论

本文对霍斯特经验公式进行了修正, 并将其应用于地下水动态的分析中, 最后定量描述了地下水动态过程的分形特征.

- a. 地下水动态过程具有明显的自仿射性, 其分形特征用 R/S 分析法进行分析是合理的.
- b. R/S 分析法可以很好地定量模拟地下水动态变化, 是进行地下水动态分析的有效方法之一. R/S 分析结果充分反映了地下水动态过程随时间尺度变化的固有特性及其分维特征, 是其它方法所不及的. 其模拟的结果能为决策部门提供地下水资源开发和水污染预测、控制方面的依据.
- c. 修正后的霍斯特经验公式是原霍斯特经验公式的推广. 由两个算例的计算结果可知, c 值分别为 0.427, 0.353, 与经验公式中的 0.5 相比有较大差别, 充分说明了霍斯特经验公式的局限性.
- d. R/S 分析法的统计分形关系只能在一定时间尺度范围内成立, 该范围不能太小, 否则, 不能保证有足够的统计样本, 也不能得到可靠的统计结果.

e. 修正后的霍斯特经验公式提供了从小(大)尺度观测现象外推大(小)尺度规律的可能性. 然而,应用 *R/S* 分析法对时间序列进行预测与控制还有待于进一步研究.

参考文献：

[1] 屈世显,张建华. 复杂系统的分形理论与应用[M]. 西安:陕西人民出版社,1995. 344 ~ 358.
[2] 陈颢,陈凌. 分形几何学[M]. 北京:地震出版社,1998. 139.
[3] 陈葆乍,洪再吉. 地下水动态及其预测[M]. 北京:科学出版社,1988. 62.
[4] Ward C H, Giger W, Mccarty P L. Groundwater quality[M]. New York :Published by John Wiley & Sons Inc,1985. 164 ~ 180.

Application of *R/S* Method to Dynamic Groundwater Analysis

HUANG Yong, ZHOU Zhi-fang, WANG Jin-guo, WANG Jun-hui
(College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract : The Hurst empirical formula in the *R/S* method is modified and used for the analysis of the dynamic process of groundwater. Examples show that the use of the *R/S* method to the analysis of the dynamic process of groundwater is reasonable, and that the modified Hurst empirical formula can be widely applied to analyze time series. By means of the *R/S* method, the fractal characteristics of the dynamic process of groundwater are described quantitatively, and its fractal dimension is obtained.

Key words : dynamic state of groundwater ; *R/S* method ; time series ; fractal

《水资源保护》征订启事

(CN32 - 1356/TV, ISSN1004 - 6933, 季刊, 自办发行)

《水资源保护》是由环境水利研究会与河海大学共同主办的,以技术性为主,兼顾学术性和管理性的技术性期刊,是全国唯一的水资源保护方面的专业性期刊. 1985 年创刊,国内外公开发行人. 本刊以宣传贯彻国家的水资源保护方针政策,反映国内外水资源保护的先进科学技术,促进我国水资源保护和管理以及水环境保护工作为宗旨. 其主要任务是探讨我国水资源保护的技术政策、科学技术、宏观管理及生产实践中的重大问题;及时反映国内外在水资源保护领域中的新颖实用技术和科技信息. 推广全国各地在水资源保护工作中的成果和经验. 报道有关国内外学术会议、技术交流等消息动态.

主要刊登内容 : 水资源保护、管理、评价、监测、优化配置、节约以及水环境污染控制和水环境监测仪器等方面的文章,主要栏目有科技政策、综合述评、学术研究、工程措施、成果推广、经验交流、专题讲座、国外动态等.

主要读者对象 : 从事水资源保护工作的水利、环保及相关领域的工作者,有关工程技术、科研人员、管理干部以及大专院校的师生.

《水资源保护》全年定价 24 元(含邮资在内). 每季末月 20 日出版. 自办发行.

订阅方式 :

(1) 邮局汇款 : 请将订单和邮签与汇款单仔细填好后寄回本刊编辑部(请注明订阅《水资源保护》杂志),未收到订单者亦可向编辑部函索订单.

(2) 银行汇款 : 开户行中国工商银行南京宁海路分理处,河海大学 4301011409001024513 (请注明订阅《水资源保护》杂志). 编辑部收款后即开具正式发票.

编辑部地址 : 210098 南京市西康路 1 号 河海大学. **联系电话** : (025) 3786642.