

刚架模态分析的弹性支承梁法

彭如海¹, 刘 杰², 彭 劭²

(1. 华东船舶工业学院, 江苏 镇江 212003 2. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 推导了弹性支承梁横向自由振动模态的特征方程, 计算了几种不同弹性支承梁的前几阶反映固有频率的无量纲特征值, 提出了刚架模态分析的弹性支承梁方法. 算例表明, 将弹性支承梁法应用于平面刚架弯曲振动模态分析, 能取得较好结果.

关键词 刚架; 模态分析; 弹性支承梁法

中图分类号: TU323.3 文献标识码: A 文章编号: 1000-1980(2002)02-0009-05

在动力分析中, 结构模态(包括固有频率及相应的模态函数等主要动力特性参数)分析是否准确, 是人们一直关注的问题. 关于梁在一个平面内的横向自由振动的分析, 文献 [1~5] 给出了刚性边界条件下的精确结果, 其中文献 [4, 5] 还讨论了弹性地基上的梁的振动问题. 对于有个别集中的弹性支承的情况, 目前比较常用的是近似方法, 如利用 Rayleigh-Ritz 方法近似计算基频和低阶固有频率及模态函数 [2, 3]. 对于实际工程结构如刚架、组合结构的动力分析, 尤其是模态分析, 多半采用近似方法进行估计. 最常用的方法有集中质量法 [1, 3, 4]、矩阵位移法 [1]、模态综合法 [3~5]、有限元法 [2, 3] 以及动力刚度法 [6, 7] 等. 本文将一般的弹性支承作为边界条件引入, 从而建立了求解梁的横向自由振动模态所满足的精确的特征方程. 对于简单刚架的动力分析, 本文将考虑刚架的部分杆(梁)单元, 视其他部分对它的影响为弹性支承. 只要求出这些弹性支承的动刚度系数, 则可直接应用本文推得的精确方程来研究刚架的模态.

1 一般弹性支承梁的动力分析和特征方程

考虑图 1 所示一般弹性支承均质梁 AB 在 xoy 平面内的横向自由振动. 设梁长为 L , 截面积为 A , 密度为 ρ , 抗弯刚度为 EI , A, B 两端在垂直方向的线位移弹簧刚度分别为 c_1, c_2 , 角位移弹簧刚度分别为 α, β . 以梁在变形前的弹性线取作 x 轴, 用 $y(x, t)$ 表示梁的 x 截面在时刻 t 的横向位移. 定解问题是

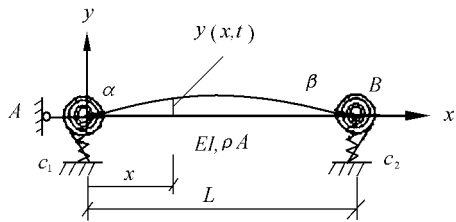


图 1 一般弹性支承梁

Fig.1 General elastic bearing beam

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \tag{1}$$

$$EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = -c_1 y(0, t) \tag{2}$$

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \alpha \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} \tag{3}$$

$$EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = c_2 y(L, t) \tag{4}$$

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = -\beta \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=L} \tag{5}$$

设方程(1)的第 n 阶振动位移为

$$y_n(x,t) = Y_n(x) \sin(\omega_n t + \varphi_n) \tag{6}$$

式中： $Y_n(x)$ —— n 阶模态函数； ω_n —— n 阶固有频率； φ_n ——初相角。将式(6)代入式(1)可得模态函数：

$$Y_n(x) = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx + A_3 \sinh kx + A_4 \cosh kx \tag{7}$$

将式(6)代入式(2)~(5)并消去 $\sin(\omega_n t + \varphi_n)$ ，经移项并作无量纲化处理后，得到关于系数 A_1, A_2, A_3, A_4 的齐次方程组

$$WV = 0 \tag{8}$$

其中

$$V = (A_1, A_2, A_3, A_4)^T \tag{9}$$

$$W = \begin{bmatrix} -u^3 & R_{c1} & u^3 & R_{c1} \\ R_{\alpha} & u & R_{\alpha} & -u \\ u^3 \cos u + R_{c2} \sin u & -u^3 \sin u + R_{c2} \cos u & -u^3 \cosh u + R_{c2} \sinh u & -u^3 \sinh u + R_{c2} \cosh u \\ -u \sin u + R_{\beta} \cos u & -u \cos u - R_{\beta} \sin u & u \sinh u + R_{\beta} \cosh u & u \cosh u - R_{\beta} \sinh u \end{bmatrix} \tag{10}$$

式中无量纲因子

$$R_{c1} = \frac{c_1 L^3}{EI}, R_{c2} = \frac{c_2 L^3}{EI}, R_{\alpha} = \frac{\alpha L}{EI}, R_{\beta} = \frac{\beta L}{EI}, u = \mu_n = kL = \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \omega_n L \tag{11}$$

由方程组(8)取得非零解组的充要条件 $\det W = 0$ ，得到与第 n 阶固有频率对应的特征值 $u = \mu_n$ 所满足的特征方程为

$$\begin{aligned} &u^8[1 - \cos u \cosh u] + u^7[-(R_{\alpha} + R_{\beta})(\sin u \cosh u + \cos u \sinh u)] + u^6[-2R_{\alpha}R_{\beta} \sin u \sinh u] + \\ &u^5[(R_{c1} + R_{c2})(\cos u \sinh u - \sin u \cosh u)] + u^4[(R_{c1}R_{\alpha} + R_{c2}R_{\beta})(1 + \cos u \cosh u) + \\ &\alpha(R_{c1}R_{\beta} + R_{c2}R_{\alpha}) \cos u \cosh u] + u^3[R_{\alpha}R_{\beta}(R_{c1} + R_{c2})(\cos u \sinh u + \sin u \cosh u)] + \\ &u^2[2R_{c1}R_{c2} \sin u \sinh u] + u[R_{c1}R_{c2}(\alpha R_{\alpha} + R_{\beta})(\sin u \cosh u - \cos u \sinh u)] + \\ &R_{c1}R_{c2}R_{\alpha}R_{\beta}(1 - \cos u \cosh u) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

由特征方程(12)可求出 u 的从小到大排列的正根 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ ，注意到 μ_n 与固有频率 ω_n 满足(11)或

$$\omega_n = \frac{u^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \frac{\mu_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{13}$$

一旦求出 ω_n ，再代入方程组(8)可求出 A_2, A_3, A_4 用 A_1 来表示的结果或 V 的基础解向量，然后代入(9)就可以写出第 n 阶模态函数 Y_n 。

2 模态分析举例

下面列举几种不同的支承情况。

a. 两端对称的角位移弹性支承固定梁(图2)。令 $R_{c1} \rightarrow \infty, R_{c2} \rightarrow \infty, R = R_{\alpha} = R_{\beta} = \frac{\alpha L}{EI}$ ，可得频率特征方程

$$2u^2 \sin u \sinh u - 2Ru(\cos u \sinh u - \sin u \cosh u) + R^2(1 - \cos u \cosh u) = 0 \tag{14}$$

b. 左端固支右端仅有一线位移弹性支承梁(图3)。令 $R = \frac{cL^3}{EI}$ ，由式(12)可得频率特征方程为

$$u^3(1 + \cos u \cosh u) - R(\cos u \sinh u - \sin u \cosh u) = 0 \tag{15}$$

c. 左端固支右端有一角位移弹性支承固定梁(图4)，其频率特征方程为

$$u(\cos u \sinh u - \sin u \cosh u) - R(1 - \cos u \cosh u) = 0 \tag{16}$$

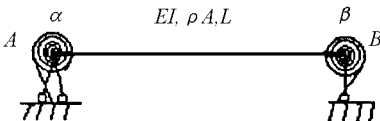


图2 角位移弹性支承固定梁
Fig.2 Elastic bearing rigid beam with symmetric angle displacement at two ends

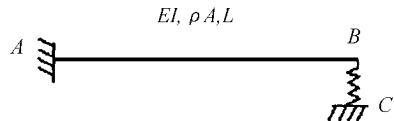


图3 一端线位移弹性支承梁
Fig.3 Elastic bearing beam with linear displacement at one end

其中 $R = \frac{\beta L}{EI} = R_{\beta}$.

3 弹性支承梁法在平面刚架模态分析中的应用

对于简单的无侧移的平面刚架模态分析, 可以采用下面介绍的弹性支承梁法. 即取刚架的某段作为研究对象, 并视为弹性支承梁, 而将去掉部分的影响用弹性支承代替. 其刚度系数应视为动刚度系数, 用解强迫振动的方法予以计算. 然后令强迫广义力的频率等于弹性支承梁的固有频率 ω_n , 从而建立起 ω_n (或 u) 应满足的频率特征方程进而求出 ω_n 和相应的模态函数. 现以图 5 所示刚架来说明弹性支承梁法.

设折杆 ABC 以 A, C 为固支端, $AB \perp BC$, B 为刚接点, AB 段与 BC 段的抗弯刚度、单位长度质量、杆长分别为 $EI, \rho A, L$ 与 $EI_1, \rho A_1, L_1$. 试建立该平面刚架的频率方程并计算出当 $EI = EI_1, \rho A = \rho A_1, L_1 = 1.5L$ 时的固有频率 ω_1, ω_2 .

将图 5 中的 BC 杆去掉, 用角位移弹性支承代替, 因为 BC 杆的拉压变形比起 AB 杆在 B 处的弯曲变形属高阶微量, 因此认为 AB 杆的 B 端在垂直方向的位移为零. AB 杆可简化为图 4 所示的弹性支承梁模型, 易知 AB 段的频率特征值由式 (16) 决定, 由 (16) 得到

$$R = \frac{\beta L}{EI} = \frac{u(\cos u \sinh u - \sin u \cosh u)}{1 - \cos u \cosh u} \tag{17}$$

$$\beta = \frac{EI}{L} \frac{u(\cos u \sinh u - \sin u \cosh u)}{(1 - \cos u \cosh u)} \tag{18}$$

β 反映了去掉的 BC 段的影响. 不过 β 不能采用静刚度值, 而必须认为是与激励频率 θ 有关的动刚度系数. 为此, 建立图 6 所示的模型来计算 β . 设 B 端作用一交变力偶矩 $M_0 \sin \theta t$ (M_0 为力偶矩幅值, θ 为其角频率). 计算出 B 端的转角 $\varphi_B = \varphi_0 \sin \theta t$, 则

$$\beta = \frac{M_0}{\varphi_0} = \frac{M_0}{Y_1'(0)} \tag{19}$$

式 (19) 中 $Y_1'(0)$ 是图 6 中梁 BC 的挠度 $y_1(x_1, t)$ 的振幅函数 $Y_1(x_1)$ 在 $x_1 = 0$ 处的转角. 仿照前面的做法, 可知振幅函数可表示为

$$Y_1(x_1) = B_1 \sin k_1 x_1 + B_2 \cos k_1 x_1 + B_3 \sinh k_1 x_1 + B_4 \cosh k_1 x_1 \tag{20}$$

式中
$$k_1 = \sqrt[4]{\frac{\rho A_1}{EI_1} \theta^2} \tag{21}$$

易求得
$$\beta = \frac{M_0}{\varphi_0} = \frac{EI_1}{L_1} \frac{v(\sin v \cosh v - \cos v \sinh v)}{1 - \cos v \cosh v} \tag{22}$$

式中
$$v = k_1 L_1 = \sqrt[4]{\frac{\rho A_1}{EI_1} \theta^2} L_1 \tag{23}$$

为了确定刚架的固有频率, 令 $\theta = \omega_n$, 并比较 (18) 与 (22) 可得到

$$\beta = \frac{EI_1}{L_1} \frac{v(\sin v \cosh v - \cos v \sinh v)}{1 - \cos v \cosh v} = \frac{EI}{L} \frac{u(\cos u \sinh u - \sin u \cosh u)}{1 - \cos u \cosh u}$$

由此得到刚架共振时 ω_n 所满足的特征方程

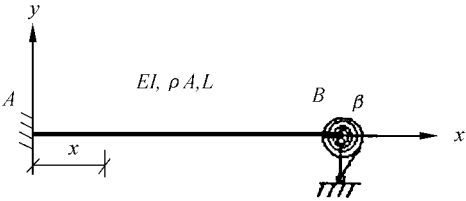


图 4 一端角位移弹性支承固定梁
Fig.4 Elastic bearing rigid beam with angle displacement at one end

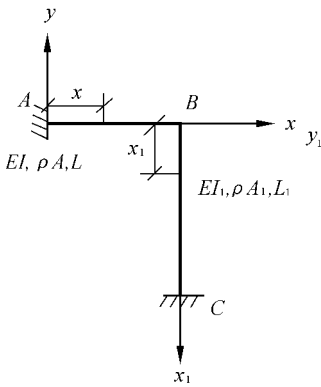


图 5 刚架 ABC
Fig.5 Rigid frame ABC

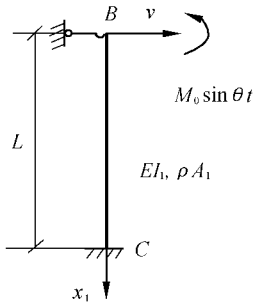


图 6 求 beta 模型
Fig.6 Model for calculation of beta value

$$\frac{EI_1}{L_1} \frac{v(\sin v \cosh v - \cos v \sinh v)}{1 - \cos v \cosh v} + \frac{EI}{L} \frac{u(\sin u \cosh u - \cos u \sinh u)}{1 - \cos u \cosh u} = 0 \tag{24}$$

引入相对刚度系数

$$R(\mu) = \frac{\mu(\sin \mu \cosh \mu - \cos \mu \sinh \mu)}{1 - \cos \mu \cosh \mu} \tag{25}$$

$R(\mu) \sim \mu$ 的相对变化见图 7, 则特征方程 (24) 简记为

$$\frac{EI_1}{L_1} R(v) + \frac{EI}{L} R(u) = 0 \tag{26}$$

其中 $v = k_1 L_1 = \sqrt[4]{\frac{\rho A_1}{EI_1} \omega_n^2 L_1} = \left[\frac{L_1}{L} \sqrt[4]{\frac{\rho A_1}{\rho A} \frac{EI}{EI_1}} \right] u$ (27)

利用 $EI_1 = EI, \rho A_1 = \rho A, L_1 = 1.5L$, 易知 $v = 1.5u$, 于是方程 (24) 化为

$$R(u) + \frac{2}{3} R(1.5u) = 0 \tag{28}$$

式中 $R(u)$ 由式 (25) 确定.

用二分法算得满足 (28) 的频率特征值为 ($u = \mu_n$): $\mu_1 = 2.896, \mu_2 = 4.244, \mu_3 = 5.093, \mu_4 = 6.894, \mu_5 = 7.618$. 因而各阶模态函数可以完全确定下来.

刚架 ABC 的各阶模态函数可分段表示. AB 段由式 (7) 表示, BC 段由式 (20) 表示, 但其中的 k_1 表达式

(21) 中的 θ 应改为 ω_n . 注意到 $k = k_1 = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI} \omega_n^2}$, 利用边界条件与变形协调条件, 模态函数可表示为

$$\left. \begin{aligned} AB \quad Y(x) &= A_1 [\sin kx + \lambda_2 \cos kx - \sinh kx - \lambda_2 \cosh kx] \\ BC \quad Y_1(x_1) &= A_1 [\lambda_5 \sin kx_1 + \lambda_6 \cos kx_1 - \lambda_5 \sinh kx_1 - \lambda_6 \cosh kx_1] \quad 0 \leq x_1 \leq L_1 \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

式中 A_1 是任意的, 但 $\lambda_2, \lambda_5, \lambda_6$ 之值对于不同的模态函数则有不同的结果. 例如一阶模态函数: 一阶固有频率 $\omega_1 = \frac{2.896^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, k = \frac{2.896}{L}, \lambda_2 = -0.898, \lambda_5 = -1.967, \lambda_6 = 1.984$. 于是一阶模态函数得以确定. 分段表示如下:

$$\begin{aligned} AB \quad Y(x) &= A_1 [\sin kx - 0.898 \cos kx - \sinh kx + 0.898 \cosh kx] \\ BC \quad Y_1(x_1) &= A_1 [-1.957 \sin kx_1 + 1.984 \cos kx_1 + 1.957 \sinh kx_1 - 1.984 \cosh kx_1] \quad 0 \leq x_1 \leq L_1 \end{aligned}$$

作为特例, 如果让 AB 杆与 BC 杆完全一样, 于是方程 (26) 化为 $R(u) = 0$. 代入式 (25), 即得

$$\tan u = \tanh u \tag{30}$$

由此可见, 这时的刚架都可简化为左端固支右端铰点的梁. 令 $R(u) = 0$, 由图 7 或式 (30) 可求得

$$\mu_1 = 3.9266, \mu_2 = 7.0686, \mu_3 = 10.2102, \mu_4 = 13.5520, \dots, \mu_n = \frac{\pi}{4} + n\pi \quad (n \geq 5)$$

这些结果与经典结果^[1~4]一致.

对于图 8 所示的三杆刚架结构, 代替总刚度为零的方程 (26) 的是

$$\frac{EI_1}{L_1} R(u_1) + \frac{EI_2}{L_2} R(u_2) + \frac{EI_3}{L_3} R(u_3) = 0 \tag{31}$$

其中 $u_i = K_i L_i = \sqrt[4]{\frac{\rho A_i}{EI_i} \omega_n^2 L_i} \quad (i = 1, 2, 3)$ (32)

作为算例, 设

$$EI_1 = EI_3 = EI_0, EI_2 = \frac{16}{25} EI_0, \rho A_1 = \rho A_3 = \rho A_0, \rho A_2 = \frac{25}{16} \rho A_0, L_1 = L_2 = L_0, L_3 = 1.5 L_0$$

若令 $u_1 = \sqrt[4]{\frac{\rho A_0}{EI_0} \omega_n^2 L_0} = u, u_2 = \sqrt[4]{\frac{\rho A_2}{EI_2} \omega_n^2 L_2} = \frac{5}{4} u, u_3 = \sqrt[4]{\frac{\rho A_3}{EI_3} \omega_n^2 L_3} = \frac{3}{2} u$, 则方程 (31) 化简为

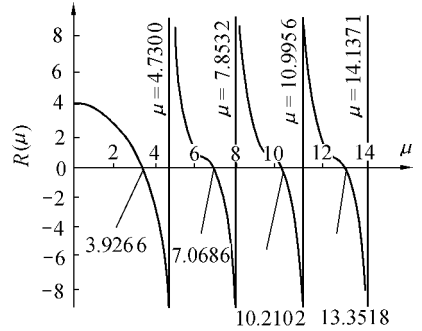


图 7 相对刚度变化

Fig.7 Change of relative rigidity

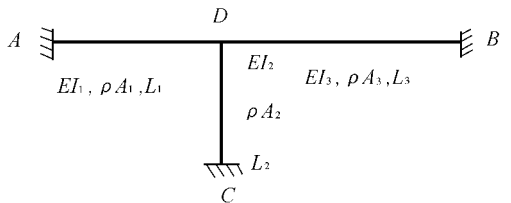


图 8 三杆刚架

Fig.8 Rigid frame with three beams

$$R(u) + \frac{16}{25}R\left(\frac{5}{4}u\right) + \frac{2}{3}R\left(\frac{3}{2}u\right) = 0$$

(33)

将 (25) 代入 (33) , 用二分法求得前 5 阶频率特征值为

$$\mu_1 = 2.896, \mu_2 = 3.604, \mu_3 = 4.425, \mu_4 = 5.109, \mu_5 = 6.092$$

求出一阶固有频率 $\omega_1 = \frac{2.896^2}{L_0^2} \sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0}}$. 此结果与文献 [6 , 7] 一致 .

可以证明 : 对于图 6、图 8 刚架的模态频率方程 (26) 与 (31) , 同采用有限梁精确求解的方法 (即利用边界条件与变形协调条件严格求解) 所得结果完全一样 . 然而 , 后者显然比较麻烦 .

4 结 论

- a. 本文推导了一般弹性支承梁横向自由振动特征方程 , 得到各种不同弹性支承下的结果 .
- b. 应用弹性支承梁方法对无侧移刚架进行模态分析可以得到精确结果 . 让系统发生第 n 阶共振 , 令结点总刚度为零的方程通过二分法可求得各阶特征值与固有频率 , 进而确定刚架的模态函数 . 当系统共振时 , 结点的总刚度为零 . 对一阶共振而言 , 刚度相对大的杆段的相对刚度系数为正 , 而刚度相对小的杆段的相对刚度系数为负 , 符合结点弯矩平衡条件 .

参考文献 :

[1] 龙驭球 , 包世华 . 结构力学教程 [下册] [M] . 北京 : 高等教育出版社 , 1995 . 51 ~ 64 .
[2] 郑兆昌 . 机械振动 [上册] [M] . 北京 : 机械工业出版社 , 1980 . 329 ~ 341 , 346 ~ 356 , 378 ~ 385 , 429 ~ 453 .
[3] 刘延柱 , 陈文良 , 陈立群 . 振动力学 [M] . 北京 : 高等教育出版社 , 1998 . 132 ~ 151 .
[4] 翁致远 . 结构振动理论 [M] . 上海 : 同济大学出版社 , 1988 . 94 ~ 112 , 118 ~ 119 .
[5] Thomson W T . Theory of vibration with applications [M] . New Jersey : Inc , Englewood Cliffs , 1972 . 271 ~ 274 , 282 ~ 286 , 320 ~ 326 .
[6] 黄玉盈 . 结构振动分析基础 [M] . 武汉 : 华中工学院出版社 , 1988 . 18 ~ 22 .
[7] Clough R W , Penzien J . 结构动力学 [M] . 王光远等译 . 北京 : 科学出版社 , 1981 . 37 ~ 42 .

Elastic Bearing Beam Method for Mode Analysis of Rigid Frame

PENG Ru-hai¹ , LIU Jie² , PENG Jie²

- (1. East China Shipbuilding Institute , Zhenjiang 212003 , China ;
2. College of Civil Engineering , Hohai Univ . , Nanjing 210098 , China)

Abstract : The characteristic equation of free transverse vibration mode of elastic bearing beams is deduced , and the non-dimensional characteristic values of anterior steps reflecting the fixed frequency are calculated for several different elastic bearing beams . The elastic bearing beam method is developed for mode analysis of rigid frames . The present method is applied to the mode analysis of bending vibration of a plane rigid frame , and the result is satisfactory .

Key words : rigid frame ; mode analysis ; elastic bearing beam method