

用勒让德多项式逼近结构的瞬态响应

范庆忠,王雨苗

(山东农业大学水利学院,山东 泰安 271000)

摘要 :以勒让德多项式作为结构响应计算的试函数 ,利用其正交性导出了线性结构的瞬态响应的数学模型 .推导中没有对位移响应作时间上的离散 ,所得的位移响应是一连续函数 ,与时间离散无关 ,且无条件稳定 .算例表明 ,该方法具有很高的精度 .

关键词 瞬态响应 ;逼近 ;离散化 ;坐标变换 ;正交性 ;稠密

中图分类号 :TU311 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2002)02-0026-04

随着数值计算理论和科学技术的发展 ,人们对结构动态特性的研究日益重视起来 ,对结构动力响应的分析也变得越来越重要 ,甚至有时会成为工程设计中的突出问题 .结构动力响应的计算方法大致分为两类 (a)坐标变换法 ,即 RiZ 变换 ,把物理空间的动力方程变换到模态空间中去求解 ,如振型叠加^[1] .(b)直接积分法 .该方法不需对原动力方程进行坐标变换 ,而是在时域内进行离散 ,将某瞬时的加速度和速度用相邻时刻的各位移的线性组合来表示 .这样 ,原动力方程就化成由位移组成的某瞬时的线性代数方程组 ,因而可逐步求出在一系列离散时刻上的响应值 ,如 Houbolt 法、Wilson- θ 法和 Newmark 法^[2] .其中加权值法 ,由于概念明确、使用方便而备受国内外学者的关注 .文献 [2] 用三次样条插值和多种权函数导出了各种算法 .

本文以第一类勒让德多项式作为结构动力响应的试函数 ,并利用该多项式的正交性 ,直接导出了结构动力响应的计算公式 .

1 结构响应的计算方法

1.1 勒让德 (Legendre) 多项式的特点

a. 第一类勒让德多项式具有如下形式^[3] :

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n \cdot m! (n-m)! \cdot (n-2m)!} x^{n-2m} \quad (1a)$$

式中 $[\frac{n}{2}]$ 表示取整 ,下同 .

式 (1a) 用 Rodrigues 表达式表示为

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (1b)$$

其递推公式为

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x \cdot P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$$

b. 正交性

$$\int_{-1}^1 P_m(x) \cdot P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases} \quad (2a)$$

另外 ,当 k 为小于 n 的正整数时 ,有

$$\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = 0 \tag{2b}$$

c. 导数的递推

$$P_n'(x) = \sum_{i=1}^{[\frac{n-k+2}{2}]} A(k, n, i) P_{n-2i-k+2}(x) \tag{3}$$

式中

$$A(k, n, i) = \frac{(i+k-2)!}{(i-1)!(k-1)!} (2n-2k-4i+5) \prod_{j=1}^{k-1} (2n-2j-2i+3)$$

1.2 计算格式

设线性结构经有限离散后,其动力方程为

$$M\{\ddot{x}\} + C\{\dot{x}\} + K\{x\} = \{f(t)\} \tag{4}$$

式中: M, C, K ——结构的质量、阻尼和刚度矩阵; $\{x\}, \{\dot{x}\}, \{\ddot{x}\}$ ——结构的位移、速度和加速度列阵; $\{f(t)\}$ ——荷载列阵.现在时间域 $[t_0, t_0']$ 内考察位移响应 $x(t)$.设 $\{x(t)\}$ 近似地表示为勒让德多项式的线性组合

$$\tilde{x}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n\} P_n(\tau) \tag{5}$$

式中: τ ——无因次的时间因子, $\tau = (2t - T)/T$, T 为时间定义域,即 $T = t_0' - t_0$; $\{A_n\}$ ——系数列阵.

因 $P_n(\tau)$ 在 $[-1, 1]$ 上关于权函数 $P_m(\tau)$ 正交且是完备的,所以以 $P_n(\tau)$ 为多项式函数空间 $P(R^2)$ 在连续函数空间 $C(R^2)$ 中是稠密的,当多项式的个数趋于无穷时,则有 $\{\tilde{x}(\tau)\}$ 收敛于 $\{x(\tau)\}$.将式(5)代入式(4),得

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\{A_n\} \cdot \frac{4}{T^2} P_n^{(2)}(\tau) + \sum_{n=0}^{\infty} C\{A_n\} \cdot \frac{2}{T} P_n'(\tau) + \sum_{n=0}^{\infty} K\{A_n\} P_n(\tau) = \{f(t)\}$$

即

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{T^2} M\{A_n\} \cdot \sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]} A(2, n, i) P_{n-2i}(\tau) + \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{T} C\{A_n\} \cdot \sum_{i=1}^{[\frac{n+1}{2}]} A(1, n, i) P_{n-2i+1}(\tau) + \sum_{n=0}^{\infty} K\{A_n\} P_n(\tau) = \{f(t)\} \end{aligned} \tag{6}$$

为了求得系数 $\{A_n\}$,利用勒让德多项式的正交性,在式(6)两边同乘以 $P_m(\tau)$ 并在区间 $[-1, 1]$ 上积分,同时将多项式截断,取前 N 项,经变换整理,得

$$\begin{aligned} &K\{A_n\} + \frac{2}{T} C \sum_{i=1}^{[\frac{N-n+1}{2}]} \{A_{n+2i-1}\} \cdot A(1, n+2i-1, i) + \\ &\frac{4}{T^2} M \sum_{i=1}^{[\frac{N-n}{2}]} \{A_{n+2i}\} \cdot A(2, n+2i, i) - \frac{2n+1}{2} \{b_n\} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\{b_n\} = \int_{-1}^1 \{f(\tau)\} P_n(\tau) d\tau \tag{8}$$

式(7)中含有 $N+1$ 个未知量 $\{A_0\}, \{A_1\}, \{A_2\}, \dots, \{A_n\}$.但式(7)中的 n 可取 $0, 1, 2, \dots, N-2$,即式(7)共含 $N-1$ 个方程,因此要解出全部 $N+1$ 个系数列阵,还必须补充两个方程.现利用初始条件,当 $t = t_0$ 时,即 $\tau = -1$ 时有

$$\{x(t_0)\} = \{x_0\} \quad \{\dot{x}(t_0)\} = \{\dot{x}_0\} \tag{9}$$

将 $\tilde{x}(\tau)$ 代入式(9),得

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n \{A_n\} = \{x_0\} \quad \sum_{n=1}^N \{A_n\} \sum_{i=1}^{[\frac{n+1}{2}]} A(1, n, i) \cdot P_{n-2i+1}(-1) = \{\dot{x}_0\} \tag{10}$$

这样,加上式(10)中两个方程正好有 $N+1$ 个方程,可解出 $N+1$ 个系数 $\{A_n\}$.当 $\{A_n\}$ 已知时,结构的位移、速度和加速度响应即可求得.

2 荷载项 $\{b_n\}$ 的计算

由于所取权函数也为勒让德多项式,因而使得荷载项的计算比较简单,一般利用简单积分即可.下面给

出几种简单荷载情况下的计算式.

- a. $\{f(t)\} = \{c\}$, c 为常数, 则 $\{b_0\} = 2\{c\}$, $\{b_n\} = \{0\}, n \geq 1$ 时.
- b. $\{f(t)\}$ 为幂函数 $\{at^k\}$. 当 $k < n$ 时, $\{b_n\} = \{0\}$; 当 $k \geq n$ 时, 即可化为定积分求解.
- c. $\{f(t)\}$ 为任意连续函数. 作 $t = \frac{1+\tau}{2}T$ 代换后, $\{f(t)\}$ 可表示为 τ 的连续函数, 则

$$\{b_n\} = \int_{-1}^1 f(\tau) P_n(\tau) d\tau$$

可化为简单积分.

3 稳定性和精度分析

以上推导过程中并没有对位移响应作时间上的离散, 而是用一连续函数的线性组合作试函数. 计算中只要确定总的步长, 即 $(t_0, t_0 + T)$, 就可导出一组对应于时间域 $(t_0, t_0 + T)$ 的系数 $\{A_n\}$. 因此, 按此方法导出的位移响应 $x(t)$ 是一连续函数, 与时间离散无关, 而且是无条件稳定的. 另外, 由于试函数中自变量 x 是时间的无量纲表示, 取值范围是 $[-1, 1]$, 所以其精度取决于多项式的截断值 N . 因 $P_n(t)$ 是幂函数可知, 该方法的精度很高.

4 算 例

求解两个自由度体系的瞬态响应:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

已知系统中的初始条件为 $x_{t=0} = 0, \dot{x}_{t=0} = 0$. 计算中取时间周期 $T = 2$, 截取多项式的项数为 N , 计算结果如表 1 所示.

表 1 多项式计算
Table 1 Calculation result of polynomial

项数 N	位移	时间 t									
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
6	x_1	0	0.00129	0.01017	0.04836	0.14570	0.32899	0.61359	0.99764	1.45914	1.95562
	x_2	0	0.19579	0.75851	1.59837	2.58209	3.56299	4.40184	4.99307	5.27192	5.22697
8	x_1	0	0.00066	0.01029	0.04962	0.14672	0.32858	0.61203	0.99635	1.45911	1.95625
	x_2	0	0.19736	0.75830	1.59532	2.57947	3.56312	4.40556	4.99622	5.27196	5.22541
10	x_1	0	0.00066	0.01027	0.04962	0.14674	0.32858	0.60201	0.99635	1.45913	1.95625
	x_2	0	0.19735	0.75834	1.59531	2.57941	3.56312	4.40561	4.99623	5.27193	5.22541
精确解	x_1	0	0.00066	0.01027	0.04962	0.14674	0.32858	0.60201	0.99635	1.45913	1.95625
	x_2	0	0.19735	0.75834	1.59531	2.57941	3.56312	4.40561	4.99623	5.27193	5.22541

从表 1 可以看出, 当截断值 N 为 6 时, 可以精确到小数点后两位, 而当 N 取 10 时, 则与精确解完全相同. 因此, 对于一种大型的结构, 只要将 N 取适当大的值, 就会得到非常满意的结果.

5 结 论

以第一类勒让德多项式为试函数, 直接推导建立了线性结构的动力响应计算公式, 得到的位移响应函数是一与时间离散无关的连续函数, 且无条件稳定. 只要取适当的多项式的截断值, 则计算结果就具有足够的精度.

参考文献:

[1] 孙靖民, 等. 机床结构计算的有限元方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 1981. 179~184.
[2] 张汝清, 殷学纲, 董明. 计算结构动力学[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1987. 116~135.
[3] 南京工学院数学组. 数学物理方程与特殊函数[M]. 北京: 高等教育出版社, 1986. 129~145.

Approximation of Transient Structural Response with Legendre Polynomial

FAN Qing-zhong , WANG Yu-miao

(College of Hydraulic Engineering , Shandong Agricultural Univ. , Taian 271000 , China)

Abstract: The Legendre Polynomial is taken as the trial function for calculation of structural response , and the orthogonality of the function is used for development of a mathematical model for transient response of linear structures. During the deduction , time discretization of displacement response is not performed. The displacement response derived is a continuous function , which is irrelevant with time discretization and stable in any case. Examples show that the present method is of high precision.

Key words: transient response ; approximation ; discretization ; coordinate transformation ; orthogonality ; dense

《河海大学学报(自然科学版)》征订启事

《河海大学学报(自然科学版)》是以水资源开发、利用与保护为重点的综合性学术期刊 ,主要刊登本校在水资源、水文、地质、测量、水利工程、水电工程、水运工程、海洋及海岸工程、水工结构、工程力学、水力学及河流动力学、岩土工程、计算机科学、电力工程、电子技术及自动化工程、工业与民用建筑、管理工程、水利经济、环境工程、机械工程等学科方面的科研成果学术论文、学术讨论、研究动态等学术性文章 ,可供上述有关专业的科技工作者及大专院校师生阅读和参考。

本刊创办于 1957 年 ,是我国中文核心期刊 ,在国内工程技术界和学术界有较大影响。刊载的文章中 ,有不少国家科技攻关(重点)项目和各种科学基金资助项目的研究成果 ,部分达到了国内领先和国际先进水平 ,为我国水利、水电、水运工程及其他有关工程建设的规划、设计、施工和管理提供了科学理论、方法和具体建议 ,发挥了较大的社会效益和经济效益 ,深受工程界和科技界赞许 ,并获得全国优秀高校自然科学学报二等奖 ,以及全国水利系统优秀期刊、江苏省优秀期刊称号。本刊每逢单月出版 ,国内外公开发行 ,邮发代号 : 28-63 ,每期定价 8.00 元 ,全年订费 48.00 元。欢迎广大读者在全国各地邮局订阅或直接与编辑部联系。联系地址 :南京市西康路 1 号《河海大学学报(自然科学版)》编辑部 ,邮政编码 210098。