

弹塑性问题的互补变分原理与模型

孙林松¹, 郭兴文², 王德信²

(1. 扬州大学水利与建筑工程学院, 江苏 扬州 225001; 2. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 首先利用塑性理论中屈服函数与塑性流动参量之间的互补性, 给出了弹塑性问题的互补虚功原理. 然后用 Taylor 级数对屈服函数进行线性化处理, 导出了基于有限单元法的弹塑性问题的线性互补模型, 并给出了求解方法. 算例结果表明, 本文方法不但具有较高的计算效率和计算精度, 而且具有较广的适用范围.

关键词 弹塑性; 互补虚功原理; 有限单元法; 线性互补模型

中图分类号 O344.3 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2002)02-0035-04

弹塑性问题是力学中的古典问题, 也是工程中的常见问题. 目前, 在求解这类问题时大多采用迭代类解法. 这类解法需要不断重复“试探—求解—调整”的过程, 计算工作量往往较大, 而且算法的收敛性不能完全得到保证. 鉴于此, 许多学者又转向致力于非迭代类解法的研究. 我国学者钟万勰^[1] 利用其创立的参变量变分原理将弹塑性问题转化为二次规划问题来求解. 文献[2, 3] 则利用变分不等式导出了与二次规划问题相应的线性互补模型. 本文直接利用塑性理论中屈服函数与塑性流动参量之间的互补性, 给出了弹塑性问题的互补变分原理, 进而导出了基于有限元离散的线性互补模型.

1 塑性增量理论的基本公式^[4]

塑性力学中的应力应变状态与历史有关, 因此常用增量法求解. 弹塑性问题可描述为: 在给定时刻 t , 假设处于平衡状态的变形体 Ω 上各点的形变与应力状态变量为 $u_i, \varepsilon_{ij}^p, \sigma_{ij}$, 反映变形历史的内变量为 κ ; 在 Ω 内给定体力增量 db_i , 在边界 S_p 上给定面力增量 dp_i , 在边界 S_u 上给定位移增量 du_i , 这里 S 为总边界 $S = S_p + S_u$. 要求各状态变量的相应增量 $du_i, d\varepsilon_{ij}^p, d\sigma_{ij}, d\kappa$ 等应满足下列条件:

平衡方程

$$d\sigma_{ij,j} + db_i = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

几何方程

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i}) \quad (\text{in } \Omega) \quad (2)$$

边界条件

$$d\sigma_{ij}n_j = dp_i \quad (\text{on } S_p) \quad (3)$$

$$du_i = du_i \quad (\text{on } S_u) \quad (4)$$

本构关系与流动法则

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}d\varepsilon_{kl}^e = D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (5)$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6)$$

式中: D_{ijkl} ——弹性张量; g ——塑性势函数; λ ——塑性流动因子.

屈服条件与互补关系 设 $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \kappa)$ 为材料的屈服函数, 则施加荷载增量后应满足

$$f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^p, \kappa + d\kappa) \leq 0 \quad (7)$$

当 $f < 0$ 时为弹性状态, $f = 0$ 时为塑性状态, f 与 λ 之间还应满足互补条件

$$f\lambda = 0 \quad f \leq 0, \lambda \geq 0 \quad (8)$$

2 互补虚功原理与有限元线性互补模型

2.1 互补虚功原理

设有虚位移 δdu_i , 在 S_u 上满足 $\delta du_i = 0$, 将它与式(1)相乘并在区域 Ω 内积分, 有

$$\int_{\Omega} d\sigma_{ij,j} \delta du_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} db_i \delta du_i d\Omega = 0 \quad (9)$$

利用分部积分及 S_u 上的边界条件 $\delta du_i = 0$, 式(9)成为

$$\int_{\Omega} d\sigma_{ij} \delta du_{i,j} d\Omega = \int_{S_p} d\sigma_{ij} \delta du_{i,j} n_j dS + \int_{\Omega} db_i \delta du_i d\Omega = \int_{S_p} d\bar{p}_i \delta du_i dS + \int_{\Omega} db_i \delta du_i d\Omega \quad (10)$$

利用本构关系式(5)和流动法则式(6), 式(10)左端变为

$$\int_{\Omega} d\sigma_{ij} \delta du_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} D_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \delta du_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} \left[D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - \lambda D_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right] \delta du_{i,j} d\Omega \quad (11)$$

将式(11)代入式(10), 可得虚功方程

$$\int_{\Omega} \left[D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - \lambda D_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right] \delta du_{i,j} d\Omega = \int_{S_p} d\bar{p}_i \delta du_i dS + \int_{\Omega} db_i \delta du_i d\Omega \quad (12)$$

由虚功方程式(12)的推导知其已隐含了区域 Ω 和边界 S_p 上的平衡条件, 并利用了本构关系和流动法则. 将其与反映材料状态的互补条件式(8)连接, 即得弹塑性问题的互补虚功原理为: 定理1(互补虚功原理) 弹塑性问题的边值问题等价于互补问题

$$\left. \begin{aligned} f\lambda &= 0 \quad f \leq 0, \lambda \geq 0 \\ \int_{\Omega} \left[D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - \lambda D_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right] \delta du_{i,j} d\Omega &= \int_{S_p} d\bar{p}_i \delta du_i dS + \int_{\Omega} db_i \delta du_i d\Omega \\ du_i &\in \{v_i \mid dv_i = d\bar{v}_i, \text{ on } S_u\}, \delta du_i \in \{dv_i \mid \delta dv_i = 0, \text{ on } S_u\} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

2.2 屈服函数的线性化与线性互补关系

由于屈服函数 $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \kappa)$ 一般是非线性的, 所以式(13)是一个非线性互补问题. 利用 Taylor 级数对 f 作线性近似, 有

$$f = f_0 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa \quad (14)$$

式中: f_0 ——增量步之前的屈服函数值; $d\kappa = h\lambda$, h 与内变量的形式有关, 在当前状态下一般为常数.

利用本构关系和流动法则, 可得

$$f(du_i, \lambda) = f_0 + w_{ij} du_{i,j} - m\lambda \quad (15)$$

其中: $w_{ij} = D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}$; $m = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} h$.

这样, f 与 λ 之间就有线性互补关系

$$f = f_0 + w_{ij} du_{i,j} - m\lambda \leq 0 \quad f\lambda = 0, \lambda \geq 0 \quad (16)$$

2.3 有限元离散模型

对分析区域 Ω 进行有限元离散, 设单元总数为 NE , 每个单元只处于弹性或塑性状态, 设塑性单元数为 NE_p . 引入形函数矩阵 N 和应变矩阵 B , 代入式(12)并考虑到虚位移的任意性, 可得

$$Kdu - H\lambda = dP \quad (17)$$

$$K = \sum_{e=1}^{NE} (T_u^e)^T \left(\int_{\Omega_e} B^T D B d\Omega \right) T_u^e$$

$$H = \sum_{e=1}^{NE_p} (T_u^e)^T \left(\int_{\Omega_e} B^T D \frac{\partial g}{\partial \sigma} d\Omega \right) T_{\lambda}^e$$

$$dP = \sum_{e=1}^{NE} (T_u^e)^T \left(\int_{\Omega_e} N^T db d\Omega + \int_{S_p^e} N^T d\bar{p} dS \right)$$

式中 du, λ ——系统的结点自由度列阵与单元塑性流动参数列阵 ; T_u^e, T_λ^e ——相应的单元选择矩阵.
在单元平均意义下,互补条件式(16)的有限元离散形式为

$$\left. \begin{aligned} f &= f_0 + Wdu - M\lambda \leq 0 \\ f^T\lambda &= 0, \lambda \geq 0 \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

$$f_0 = \sum_{e=1}^{NE_p} (T_\lambda^e)^T \int_{\Omega_e} f_0 d\Omega$$

$$W = \sum_{e=1}^{NE_p} (T_\lambda^e)^T \left(\int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T DB d\Omega \right) T_u^e$$

$$M = \sum_{e=1}^{NE_p} (T_\lambda^e)^T \left(\int_{\Omega_e} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} \right)^T \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f_h}{\partial \kappa} \right] d\Omega \right) T_\lambda^e$$

由式(17)解出 du 后,代入式(18)并引入松弛变量 μ ,可得弹塑性问题的线性互补模型

$$\mu - \varphi\lambda = dq \quad \mu^T\lambda = 0, \mu \geq 0, \lambda \geq 0 \tag{19}$$

式中 $\varphi = M - WK^{-1}H$; $dq = -f_0 - WK^{-1}dP$.

式(19)是一个标准的线性互补问题,可用 Lemke 算法求解.应该指出,当采用相关流动法则,即 $g = f$ 时,有 $W = H^T$,则式(19)即为文[5]中的线性互补形式.

3 算 例

图 1 所示受局部分布力作用的土体,假设为理想弹塑性材料,不考虑自重,弹性模量 $E = 206\,706\text{ kPa}$,泊松比 $\mu = 0.3$,内摩擦角 $\varphi = 20^\circ$,凝聚力 $c = 68.90\text{ kPa}$.采用本文编制的弹塑性线性互补有限元程序进行分析,计算时按平面应变问题考虑,单元剖分及边界条件见图 1,屈服准则采用 Drucker-Prager 准则,考虑非关联流动时采用 Mises 面为塑性势面.图 2 给出了 A 点的荷载-位移曲线及与文[6]的对比,从中可以看出两者吻合得很好.然而,当荷载达到 925 kPa 时,对于非关联流动情况,文[6]采用初刚度法和切线刚度法分别迭代了 248 次和 90 次才收敛,而本文采用 Lemke 算法只需进行 51 次换基运算.可见本文算法具有相当高的计算效率.另外,图 2 中还给出了土体为弹塑性软化材料时 A 点的荷载-位移曲线,这里假设土体为应变软化材料,软化模量为 10 GPa,流动法则采用非关联模型.

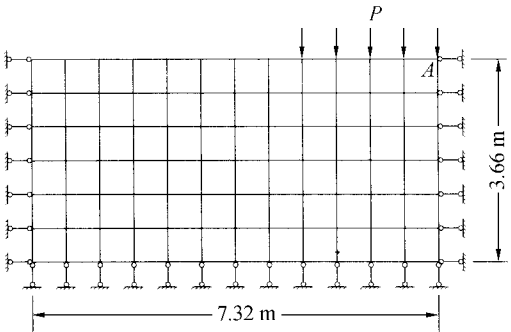


图 1 局部分布荷载作用的土体
Fig.1 Soil under local distributed load

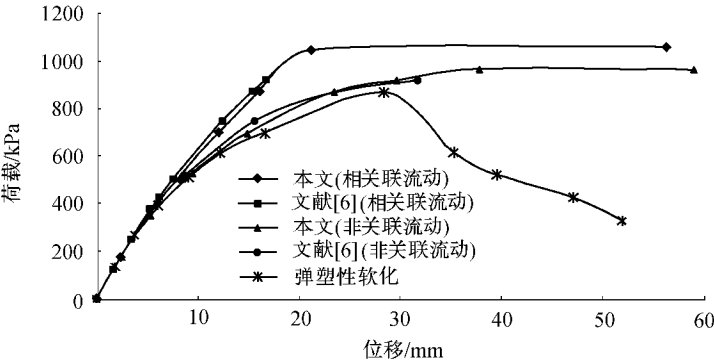


图 2 A 点荷载-位移曲线
Fig.2 Load vs. displacement for point A

4 结 语

本文直接利用塑性理论中屈服函数与塑性流动参量之间的互补性,给出了弹塑性问题的互补虚功原理,经过对屈服函数的线性化处理,给出了弹塑性问题的有限元线性互补模型,理论推导简便,概念清楚.对于解弹塑性问题,无论材料是硬化还是软化,是相关联流动还是非关联流动,本文方法均能适用.而且,该方法避免了迭代法冗长繁复的迭代过程,计算工作量小,而且具有较高的计算精度.

参考文献:

- [1] 钟万勰,张洪武,吴承伟.参变量变分原理及其在工程中的应用[M].北京:科学出版社,1997.51~193.
- [2] 沙德松,孙焕纯.虚功原理的变分不等方程及其在物理非线性问题中的应用[J].计算结构力学及其应用,1990,7(2):17~23.
- [3] 郭小明,余颖禾.塑性流动理论的变分不等式模式及其优化解[J].上海力学,1993,14(1):48~55.
- [4] 王仁,熊祝华,黄文彬.塑性力学基础[M].北京:科学出版社,1982.124~186,552~556.
- [5] 郑宏,葛修润.弹塑性分析的线性互补问题[J].力学学报,1995,27(1):38~47.
- [6] Olubayo O R Famiyesin. Robust symmetric formulation for nonassociated plasticity problems[J]. J Engng Mech,1999,125(9):1071~1080.

Complementary Variation Principle and Model for Elastoplastic Problems

SUN Lin-song¹, GUO Xing-wen², WANG De-xin²

(1. College of Hydraulic and Civil Engineering, Yangzhou Univ., Yangzhou 225001, China;

2. College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: In consideration of the complementarity between yield function and plastic flow parameters in the plastic theory, a complementary virtual work principle is proposed for elastoplastic problems. Based on the linearization of yield function with the Taylor Series, a FEM-based linear complementary model is developed, and an algorithm is also presented. Calculation shows that the present method may help improve the calculation efficiency and precision, and it has a wide scope of application.

Key words: elastoplasticity; virtual work principle with complementarity; FEM; linear complementary model