

竖向荷载作用下高层框架的一种新的计算方法

徐汉忠¹, 刘 宁¹, 李海峰²

(1. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098; 2. 江苏省高速公路建设指挥部, 江苏 南京 210000)

摘要 对于竖向荷载作用下的高层框架问题, 在传统弯矩分配法的基础上导得了一种新的求解方法, 并给出了算例. 应用结果表明, 所给出的新求解方法既便于手算, 又便于编程电算. 同时, 高层框架不必分层就能求解.

关键词 高层框架; 高层建筑; 分层法; 连续梁; 位移法; 弯矩分配法

中图分类号 :TB121 ;TU311.1 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-198X(2002)02-0054-04

钢筋混凝土高层建筑设计规程 JGJ 3—91 规定, 在风荷载和水平地震作用下的高层框架内力可用 D 值法进行简化计算. 在竖向荷载作用下高层框架可视为无侧移框架用分层法简化计算内力. 本文在文 [1, 2] 基础上, 对竖向荷载作用下的高层框架问题提出了一种新弯矩分配法.

1 四跨连续梁

1.1 中结点作用弯矩

由于框架弯矩分配法难于用图表表示, 故以图 1 所示的四跨连续梁为例来导出新的弯矩分配法, 然后推广到平面框架问题. 图 1 所示的四跨连续梁用传统的弯矩分配法^[2]列表计算的一个循环绘于图 2 中. 弯矩分配系数 $(D_{35}, D_{31}, D_{13}, D_{12}, D_{24})$ 放在一方框中. 传递系数用 $C_{13}, C_{31}, C_{12}, C_{21}$ 表示. 图 2 中

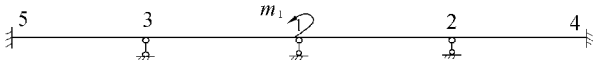


图 1 中结点作用力矩的连续梁

Fig.1 Continuous beam with m_1 acting at middle joint

数 $(D_{35}, D_{31}, D_{13}, D_{12}, D_{24})$ 放在一方框中. 传递系数用 $C_{13}, C_{31}, C_{12}, C_{21}$ 表示. 图 2 中

$$g_{12} = C_{12} C_{21} D_{12} D_{21} \qquad g_{13} = C_{13} C_{31} D_{13} D_{31} \qquad (1)$$

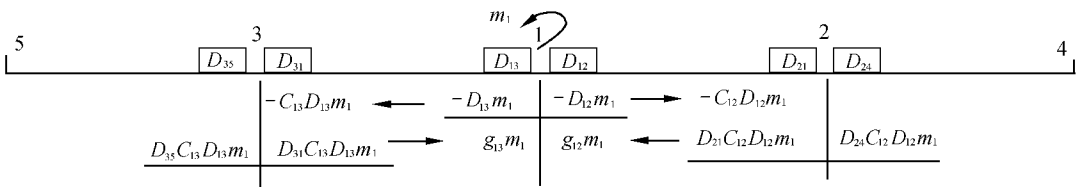


图 2 传统弯矩分配法的一个循环

Fig.2 One cycle of classical moment distribution method

可见 g_{12} 为杆件 12 两端分配系数 $D_{12} D_{21}$ 和双向传递系数 $C_{12} C_{21}$ 的乘积, g_{13} 为杆件 13 两端分配系数 $D_{13} D_{31}$ 和双向传递系数 $C_{13} C_{31}$ 的乘积. 称之为杆件性质系数. 由图 2 可知, m_1 在 1 点分配后传递至 2 和 3 点, 在 2 和 3 点分配后再传递到 1 点形成不平衡力矩, 用 m_1^2 表示, $m_1^2 = (g_{12} + g_{13}) m_1$. 同样, m_1^2 在 1 点分配后传递至 2 和 3 点, 在 2 和 3 点分配后再传递到 1 点形成不平衡力矩, 用 m_1^3 表示, 显然 $m_1^3 = (g_{12} + g_{13}) m_1^2$. 如此循环无穷多次, 在 1 点形成的不平衡力矩之和用 m_1^* 表示, 显然

$$m_1^* = m_1 + m_1^2 + m_1^3 + m_1^4 + \dots \qquad (2)$$

式 (2) 右边为公比 $(g_{12} + g_{13})$ 小于 1 的无穷等比级数的和, 故

$$m_1^* = m_1 G_1 \qquad (3)$$

其中

$$G_1 = 1/(1 - g_{12} - g_{13}) \quad (4)$$

图1问题的精确解可由图3的新弯矩分配法求得,即将1点的不平衡力矩由 m_1 改为 m_1^* , m_1^* 在1点分配后传递至2和3点,在2和3点分配后再传递到1点,分配传递结束,叠加分配力矩和传递力矩就得到在原 m_1 作用下的各杆端弯矩精确值.将图2的 m_1 改为 m_1^* 为图3,图3的一个循环为精确解.

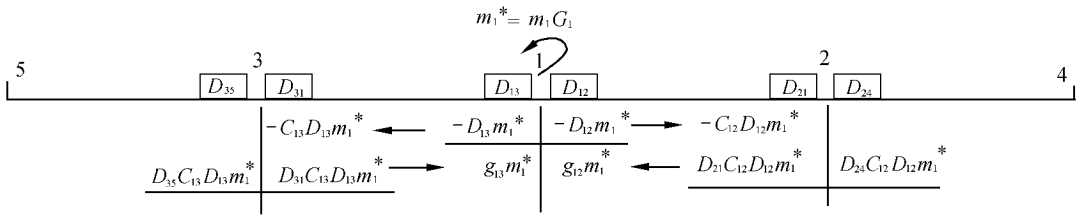


图3 新弯矩分配法的所有循环(精确解)

Fig.3 All cycles(exact solution) of new moment distribution method

2 无侧移框架及数值例

现将四跨连续梁推广到受任意荷载的无侧移框架。求解步骤如下：
(a) 求任意荷载作用下的各杆固端弯矩，进而求各结点不平衡力矩 (b) 分别求各结点不平衡力矩作用下的解，即各杆杆端弯矩 (c) 叠加由 (b) 步得到的各解得最后解。

讨论上述 (b) 步 求解只有一个结点作用外加不平衡力矩的情况. 以图 4 框架为例, 已知传递系数均为 $1/2$, 分配系数分别为 $D_{s1} = D_{s2} = D_{s3} = D_{s4} = 0.25$, $D_{1s} = D_{2s} = D_{3s} = D_{4s} = 1/3$, $D_{51} = D_{52} = D_{62} = D_{63} = 1/2$, $D_{81} = D_{84} = D_{89} = D_{73} = D_{74} = D_{710} = 1/3$, 求杆端弯矩.

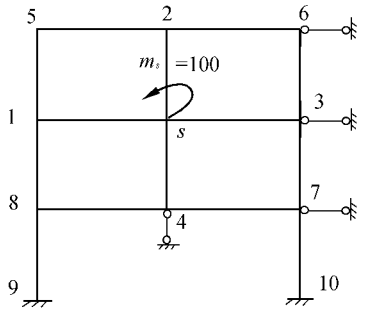


图 4 框架

Fig.4 A rigid frame

2.1 定义

2.1.1 结点定义

将外加不平衡力矩作用的结点称为源点,设源点为 s ,不平衡力矩为 m_s ,图 4 源点 s 作用的不平衡力矩 $m_s = 100$.和源点相邻的点称为源点的邻点,设为 a ,图 4 邻点 a 有 1 2 3 4.不和源点 s 相邻但和源点的邻点 a 相邻的结点为源点的远点,设为 r ,图 4 远点 r 有 5 6 7 8.

2.1.2 杆件性质系数的定义

对 sa 杆,定义杆件性质系数 g_{sa} 为

$$g_{sa} = g_{as} = D_{sa} C_{sa} D_{as} C_{as} \quad (5)$$

由式(5)计算图4杆件性质系数,

$$g_{sa} = g_{as} = D_{sa}C_{sa}D_{as}C_{as} = 1/4 \times 1/2 \times 1/3 \times 1/2 = 1/48 \quad a = 1 \ 2 \ 3 \ 4$$

2.1.3 结点性质系数的定义

对源点 s , 定义结点性质系数为

$$G_s = 1/(1 - \sum g_{sa}) \quad (6)$$

其中 $\sum g_{sa}$ 表示与源点相连的所有杆件的杆件性质系数相加, 当 a 端为支座时 g_{sa} 取为 0。由式(6)计算图 4 结点性质系数,

$$G_s = 1/(1 - \sum g_{sa}) = 1/(1 - 4/48) = 12/11$$

2.1.4 源点等效不平衡力矩 m_s^* 的定义

m_s^* 为原弯矩分配法所得各次不平衡力矩之和, 计算公式为

$$m_s^* = m_s G_s \quad (7)$$

其中 G_s 由式(6)表示,由式(7)计算图4等效不平衡力矩,

$$m_s^* = 100 \times 12/11 = 109.09$$

2.2 求解步骤

将等效不平衡力矩 m_s^* 作用于源点 s 点, 只有一个结点作用外加不平衡力矩 m_s 的问题转化为该结点在等效不平衡力矩 m_s^* 作用下按新弯矩分配法求解的问题. 求解步骤为:

a. 在 s 结点对 m_s^* 分配后传递至所有邻点 a , 得 s 端分配弯矩 M_{sa}^D 和 a 端传递弯矩 M_{as}^C 为

$$M_{sa}^D = -D_{sa}m_s^* \quad (8)$$

$$M_{as}^C = C_{sa}M_{sa}^D = -C_{sa}D_{sa}m_s^* \quad (9)$$

图 4 在 s 点对 $M_s^* = 109.09$ 分配得 sa 杆端分配弯矩

$$M_{sa}^D = -109.09 \times 1/4 = -27.27 \quad a = 1, 2, 3, 4.$$

该分配弯矩 M_{sa}^D 传递至 a 端得 as 杆端传递弯矩

$$M_{as}^C = -27.27 \times 1/2 = -13.64 \quad a = 1, 2, 3, 4$$

b. 对传递至邻点 a 的弯矩 M_{as}^C , 当 a 端为非支座端时, 在 a 结点分配后传递至源点 s 和远点 r . 在 a 结点对 M_{as}^C 分配得

$$M_{as}^D = -D_{as}M_{as}^C = D_{as}C_{sa}D_{sa}m_s^* \quad (10)$$

$$M_{ar}^D = -D_{ar}M_{as}^C = D_{ar}C_{sa}D_{sa}m_s^* \quad (11)$$

M_{as}^D 传递至源点 s 得 sa 杆端传递弯矩

$$M_{sa}^C = C_{as}M_{as}^D = C_{as}D_{as}C_{sa}D_{sa}M_s^* = g_{sa}m_s^* \quad (12)$$

M_{ar}^D 传递至远点 r 得 ra 杆端传递弯矩

$$M_{ra}^C = C_{ar}M_{ar}^D = C_{ar}D_{ar}C_{sa}D_{sa}m_s^* \quad (13)$$

图 4 在 a 结点对 $M_{as}^C = -13.64$ 分配得

$$M_{as}^D = -D_{as}M_{as}^C = -1/3 \times (-13.64) = 4.55 \quad a = 1, 2, 3, 4$$

$$M_{ar}^D = -D_{ar}M_{as}^C = -1/3 \times (-13.64) = 4.55$$

$$a = 1, r = 5, 8; a = 2, r = 5, 6; a = 3, r = 6, 7; a = 4, r = 7, 8$$

$M_{as}^D = 4.55$ 传递至源点 s 得 sa 杆端传递弯矩

$$M_{sa}^C = 2.27$$

$M_{ar}^D = 4.55$ 传递至远点 r 得 ra 杆端传递弯矩为

$$M_{ra}^C = 2.27 \quad a = 1, r = 5, 8; a = 2, r = 5, 6; a = 3, r = 6, 7; a = 4, r = 7, 8$$

c. 如有非支座的远点 r 和传递至远点的弯矩, 在远点 r 分配, 分配后不再传递, 由此引起的误差是很小的量. 远点的不平衡力矩为传递至远点的弯矩之和 $\sum_a M_{ra}^C$, 图 4 中远点 5 的不平衡力矩为 $M_{51}^C + M_{52}^C = 2.27 + 2.27 = 4.54$. 设和 r 相连的结点除 a 外还有 j , 则 $\sum_a M_{ra}^C$ 在远点 r 分配后得

$$M_{ra}^D = -D_{ra} \sum_a M_{ra}^C = -D_{ra} \sum_a (C_{ar}D_{ar}C_{sa}D_{sa}m_s^*) \quad (14)$$

$$M_{rj}^D = -D_{rj} \sum_a M_{ra}^C = -D_{rj} \sum_a (C_{ar}D_{ar}C_{sa}D_{sa}m_s^*) \quad (15)$$

图 4 在 r 点对 $\sum_a M_{ra}^C = 2.27 \times 2 = 4.54$ 分配得

$$M_{51}^D = M_{52}^D = M_{62}^D = M_{63}^D = -0.5 \times 4.54 = -2.27$$

$$M_{81}^D = M_{84}^D = M_{89}^D = M_{73}^D = M_{74}^D = M_{710}^D = -1/3 \times 4.54 = -1.51$$

以上分配弯矩一定很小, 故不再传递.

d. 将分配弯矩和传递弯矩相加得最后的杆端弯矩. 即:

杆端弯矩 M_{sa} 可由式 (8) 的 M_{sa}^D 和式 (12) 的 M_{sa}^C 相加得

$$M_{sa} = -D_{sa}m_s^* + g_{sa}m_s^* \quad (16)$$

图 4 $M_{sa}^D = -27.27$, $M_{sa}^C = 2.27$, 故 $M_{sa} = -25$.

杆端弯矩 M_{as} 可由式 (9) 的 M_{as}^C 和式 (10) 的 M_{as}^D 相加得

$$M_{as} = (-1 + D_{as})C_{sa}D_{sa}m_s^* \quad (17)$$

图 4 $M_{as}^C = -13.64$, $M_{as}^D = 4.55$, 故 $M_{as} = -9.09$ ($a = 1, 2, 3, 4$).

杆端弯矩 M_{ar} 同式 (11) 的 M_{ar}^D , 即

$$M_{ar} = D_{ar}C_{sa}D_{sa}m_s^* \tag{18}$$

图 4 $M_{ar} = 4.55$ ($a = 1, r = 5, 8$; $a = 2, r = 5, 6$; $a = 3, r = 6, 7$; $a = 4, r = 7, 8$).

杆端弯矩 M_{ra} 可由式 (13) 的 M_{ra}^C 和式 (14) 的 M_{ra}^D 相加得

$$M_{ra} = C_{ar}D_{ar}C_{sa}D_{sa}m_s^* - D_{ra} \sum_a (C_{ar}D_{ar}C_{sa}D_{sa}m_s^*) \tag{19}$$

图 4 $M_{51} = M_{52} = M_{62} = M_{63} = 0$, $M_{81} = M_{84} = M_{73} = M_{74} = 2.27 - 1.51 = 0.76$.

杆端弯矩 M_{rj} 同式 (15) 的 M_{rj}^D , 即

$$M_{rj} = -D_{rj} \sum_a (C_{ar}D_{ar}C_{sa}D_{sa}m_s^*) \tag{20}$$

图 4 $M_{89} = M_{710} = -1.51$.

以上 4 个求解步骤详细说明了新弯矩分配法的过程 , 实际计算时可忽略 a ~ c 步 , 直接采用步骤 d 的式 (16)~(20). 这些公式既适合手算又适合编制程序电算. 新弯矩分配法也可表述如下 : 由式 (6) 计算 G_s , 由式 (7) 计算 m_s^* , 将 m_s^* 作用于源点 s , 用通常的弯矩分配法进行如下的分配传递 : 在源点对等效不平衡力矩 m_s^* 分配后传递到邻点 , 在邻点分配后传递到源点和远点 , 在远点分配后不再传递.

3 结 语

本文给出了求解竖向荷载作用下的高层框架问题的一种新弯矩分配法. 新弯矩分配法具有如下特点 : (a) 克服了传统弯矩分配法不便于电算的缺点 , 而且比直接位移法更便于电算 , 直接位移法须形成和求解方程组 , 新弯矩分配法不要形成和求解方程组 , 不平衡力矩按公式一次性地分配给各杆端 , 计算机程序编制简单. (b) 分配和传递次数少 , 比传统的弯矩分配法更便于手算. (c) 竖向荷载作用下的高层框架不必分层 , 既简化了计算 , 又提高了精度. 因此 , 该方法是求解竖向荷载作用下的高层框架问题迄今较理想的方法 , 完全可替代目前所使用的分层法.

参考文献 :

[1] 徐汉忠. 结构力学中结点不平衡力矩分配传递的极限公式[J]. 河海大学学报 , 1997 , 25 (6) : 60 ~ 64.
[2] 武汉水利电力学院建筑力学教研室. 结构力学[M]. 北京 : 水利电力出版社 , 1960. 197 ~ 206.

A New Calculation Method for High-Rise Frames Subjected to Arbitrary Vertical Loads

XU Han-zhong¹ , LIU Ning¹ , LI Hai-feng²

(1. College of Civil Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China ;
2. Jiangsu Highway Construction Company , Nanjing 210000 , China)

Abstract : A new moment distribution method is developed for high-rise frames subjected to arbitrary vertical loads based on the conventional moment distribution method , and some examples are presented. Application shows that the present method is convenient for both manual and computer calculation , and that it is unnecessary to divide high-rise frames into layers for calculation of inner forces.

Key words : high-rise frame ; high-rise building ; treatment in layers ; continuous beam ; displacement method ; moment distribution method