

动态交通分配模型仿真研究

郑长江, 蔡 亮, 曹雪山

(河海大学交通与海洋工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 依据最优控制理论, 建立了一种能够用于多 OD 对拥挤道路网上的瞬时交通流形态预测的动态用户最优分配模型, 讨论了此模型离散形式的解法, 并利用 Frank-Wolfe 算法对模型进行了仿真, 计算机仿真结果表明了该方法是有效的。

关键词: 动态用户最优, 动态交通分配, 路径, 瞬时

中图分类号: U116.2 文献标识码: A 文章编号: 1000-1980(2002)03-0038-04

动态交通分配模型历经 20 余年的发展, 许多专家对此进行了大量的研究, 从出行者路径选择行为的假设, 可分为动态用户最优分配模型和动态系统最优分配模型。本文给出了一种比较符合实际的动态用户最优分配模型, 并应用最优控制原理, 离散化后进行仿真, 仿真结果较为满意。

1 数 学 模 型

用有向图 $G(N, A)$ 表示一个交通网络, N 是网络节点集, A 为有向弧集, 即路段集, 路段 $\alpha \in A$ 。假设 N 包括 3 个子集: 起点集、终点集和中间节点集。一般用 k 表示起点或中间点, n 表示终点, $A(k)$ 表示有向路段起点是 k 的路段集合, $B(k)$ 则表示有向路段终点是 k 的路段集合。

对于连续时间的动态交通分配模型, 用 $S_{kn}(t)$ 表示 t 时刻节点 k 产生的流向终点 n 的出行率, 假设其是已知的、确定的, $u_\alpha^n(t)$ 表示路段 α 上 t 时刻流向终点 n 的路段流入率, 而 $v_\alpha^n(t)$ 是流出率, $u_\alpha(t)$ 表示路段 α 上 t 时刻的路段流入率, 而 $v_\alpha(t)$ 是流出率。为简单起见, 考虑固定时段 $[0, T]$ 的最优控制问题。以 $x_\alpha(t)$ 表示 t 时刻路段 α 上存在的车辆数, 即交通负荷, 而 $x_\alpha^n(t)$ 则表示 t 时刻路段 α 上流向终点 n 的交通负荷, 有

$$x_\alpha(t) = \sum_{n \in N} x_\alpha^n(t) \quad \forall \alpha \in A \quad \forall t \in [0, T]$$

对于离散时间的动态交通分配模型, 将固定时段 $[0, T]$ 等分为 T 份, $i = 1, 2, \dots, T$ 。用 $S_{kn}(i)$ 表示 i 时段节点 k 产生的流向终点 n 的出行量, $u_\alpha^n(i)$ 表示路段 α 上 i 时段流向终点 n 的路段流入量, 而 $v_\alpha^n(i)$ 是流出量, $u_\alpha(i)$ 表示路段 α 上 i 时段的路段流入量, 而 $v_\alpha(i)$ 是流出量。以 $x_\alpha(i)$ 表示 i 时段 α 路段上存在的车辆数, 即交通负荷, 而 $x_\alpha^n(i)$ 则表示 i 时段 α 路段上流向终点 n 的交通负荷, 有

$$x_\alpha(i) = \sum_{n \in N} x_\alpha^n(i) \quad \forall \alpha \in A \quad i = 1, 2, \dots, T$$

本模型应用最优控制理论, 将路段流入率 $u_\alpha^n(t)$ 、路段流出率 $v_\alpha^n(t)$ 为控制变量, 状态变量为 $x_\alpha^n(t)$, 瞬时路段走行时间函数^[1]为

$$c_\alpha(t) = c_\alpha[x_\alpha(t), u_\alpha(t), v_\alpha(t)] = g_{1\alpha}[x_\alpha(t), u_\alpha(t)] + g_{2\alpha}[x_\alpha(t), v_\alpha(t)]$$

式中: $g_{1\alpha}[x_\alpha(t), u_\alpha(t)]$ ——车辆的瞬时流在路段 α 上的运行时间; $g_{2\alpha}[x_\alpha(t), v_\alpha(t)]$ ——车辆的瞬时流在路段 α 的排队延误时间。

模型的约束条件:

a. 路段状态方程

$$\frac{dx_\alpha^n(t)}{dt} = u_\alpha^n(t) - v_\alpha^n(t) \quad \forall \alpha \in A \quad \forall n \in N \quad \forall t \in [0, T]$$

b. 节点流量平衡方程

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}(k)} u_{\alpha}^n(t) = S_{kn}(t) + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(k)} v_{\alpha}^n(t) \quad \forall k \in N \quad \forall n \in N \quad \forall t \in [0, T] \quad k \neq n$$

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}(n)} u_{\alpha}^n(t) = 0 \quad \forall n \in N \quad \forall t \in [0, T]$$

c. 路段流出率约束

$$x_{\alpha}^n(t) = \int_t^{t+\bar{\tau}_{\alpha}(t)} v_{\alpha}^n(\omega) d\omega$$

其中 $\bar{\tau}_{\alpha}(t)$ 为估计路段走行时间.

d. 非负约束

$$x_{\alpha}^n(t) \geq 0 \quad u_{\alpha}^n(t) \geq 0 \quad v_{\alpha}^n(t) \geq 0 \quad \forall \alpha \in A \quad \forall n \in N \quad \forall t \in [0, T]$$

综上所述, 动态用户最优分配模型为

$$\left. \begin{aligned} \min J &= \int_0^T \sum_{\alpha} \left\{ \int_0^{u_{\alpha}^n(t)} g_{1\alpha}[x_{\alpha}(t), \omega] d\omega + \int_0^{v_{\alpha}^n(t)} g_{2\alpha}[x_{\alpha}(t), \omega] d\omega \right\} dt \\ \text{约束条件} \quad \frac{dx_{\alpha}^n(t)}{dt} &= u_{\alpha}^n(t) - v_{\alpha}^n(t) \quad \forall \alpha \in A \quad \forall n \in N \quad \forall t \in [0, T] \\ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}(k)} u_{\alpha}^n(t) &= S_{kn}(t) + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(k)} v_{\alpha}^n(t) \quad \forall k \in N \quad \forall n \in N \quad \forall t \in [0, T] \quad k \neq n \\ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}(n)} u_{\alpha}^n(t) &= 0 \quad \forall n \in N \quad \forall t \in [0, T] \\ x_{\alpha}^n(t) &= \int_t^{t+\bar{\tau}_{\alpha}(t)} v_{\alpha}^n(\omega) d\omega \quad \forall n \in N \quad \forall \alpha \in A \quad \forall t \in [0, T] \\ x_{\alpha}^n(0) &= 0 \quad \forall \alpha \in A \quad \forall n \in N \\ u_{\alpha}^n(t) &\geq 0 \quad v_{\alpha}^n(t) \geq 0 \quad x_{\alpha}^n(t) \geq 0 \quad \forall \alpha \in A \quad \forall n \in N \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

此模型虽是一种假设, 但可以用最优控制理论进行严格地证明^[2].

2 模型的求解

求解模型式 (1) 的离散时间形式, 该离散时间形式可视为一个非线性规划问题, 拟用 Frank-Wolfe 法求解. 模型的具体形式:

$$\left. \begin{aligned} \min J &= \sum_{i=1}^T \sum_{\alpha \in A} \left\{ \int_0^{u_{\alpha}^n(i)} g_{1\alpha}[x_{\alpha}(i), \omega] d\omega + \int_0^{v_{\alpha}^n(i)} g_{2\alpha}[x_{\alpha}(i), \omega] d\omega \right\} \\ \text{约束条件, 对于 } i &= 0, 1, \dots, T-1, \text{ 有} \\ x_{\alpha}^n(i+1) &= x_{\alpha}^n(i) + u_{\alpha}^n(i) - v_{\alpha}^n(i) \quad \forall \alpha \quad \forall n \quad \forall i \\ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}(k)} u_{\alpha}^n(i) &= S_{kn}(i) + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(k)} v_{\alpha}^n(i) \quad \forall n \quad \forall i \quad k \neq n \\ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}(n)} u_{\alpha}^n(i) &= 0 \quad \forall n \quad \forall i \\ \sum_{j=i}^{i+\bar{\tau}_{\alpha}(i)} v_{\alpha}^n(j) &= x_{\alpha}^n(i) \quad \forall \alpha \quad \forall n \quad x_{\alpha}^n(0) = 0 \quad \forall \alpha \quad \forall n \\ u_{\alpha}^n(i) &\geq 0 \quad v_{\alpha}^n(i) \geq 0 \quad x_{\alpha}^n(i) \geq 0 \quad \forall \alpha \quad \forall n \quad \forall i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 $\bar{\tau}_{\alpha}(i)$ 定义为: 如果 $(l-0.5)\Delta t < \bar{\tau}_{\alpha}(i) < (l+0.5)\Delta t$, 则 $\bar{\tau}_{\alpha}(i) = l$, 其中 l 为自然数.

对于模型 (2), 其求解线性规划为

$$\min \bar{J}(p, q, y) = \nabla_u J \cdot p^T + \nabla_v J \cdot q^T + \nabla_x J \cdot y^T$$

约束条件, 对于 $i = 0, 1, \dots, T-1$, 有

$$\begin{aligned} y_{\alpha}^n(i+1) &= y_{\alpha}^n(i) + p_{\alpha}^n(i) - q_{\alpha}^n(i) \quad \forall \alpha \quad \forall n \quad \forall i \\ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}(k)} p_{\alpha}^n(i) &= S_{kn}(i) + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(k)} q_{\alpha}^n(i) \quad \forall n \quad \forall i \quad k \neq n \\ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}(n)} p_{\alpha}^n(i) &= 0 \quad \forall n \quad \forall i \end{aligned}$$

$$\sum_{j=i}^{i+\tau_a(i)} q_a^n(j) = y_a^n(i) \quad \forall \alpha \quad \forall n$$
$$y_a^n(0) = 0 \quad \forall \alpha \quad \forall n$$
$$y_a^n(i) \geq 0 \quad p_a^n(i) \geq 0 \quad q_a^n(i) \geq 0 \quad \forall \alpha \quad \forall n \quad \forall i$$

目标函数等价

$$\min \bar{J}(p, q, y) = \sum_{i=1}^T \sum_n \sum_{\alpha} \left[\frac{\partial J}{\partial u_a^n(i)} p_a^n(i) + \frac{\partial J}{\partial v_a^n(i)} q_a^n(i) + \frac{\partial J}{\partial x_a^n(i+1)} y_a^n(i+1) \right]$$

分项计算

$$t_{1a}(i) = \frac{\partial J}{\partial u_a^n(i)} = g_{1a}[x_a(i), u_a(i)] \geq 0$$
$$t_{2a}(i) = \frac{\partial J}{\partial v_a^n(i)} = \frac{\partial J}{\partial v_a(i)} \frac{\partial v_a(i)}{\partial v_a^n(i)} = g_{2a}[x_a(i), v_a(i)] \geq 0$$
$$t_{3a}(i) = \frac{\partial J}{\partial x_a^n(i)} = \frac{\partial J}{\partial x_a(i)} \frac{\partial x_a(i)}{\partial x_a^n(i)} = \int_0^{u_a(i)} \frac{\partial g_{1a}[x_a(i), \omega]}{\partial x_a(i)} d\omega + \int_0^{v_a(i)} \frac{\partial g_{2a}[x_a(i), \omega]}{\partial x_a(i)} d\omega$$
$$t_{3a}(T+1) = 0$$

因此,目标函数可写成

$$\min \bar{J}(p, q, y) = \sum_{i=1}^T \sum_n \sum_{\alpha} [t_{1a}(i)p_a^n(i) + t_{2a}(i)q_a^n(i) + t_{3a}(i+1)y_a^n(i+1)]$$

3 算 法

更新估计路段实际走行时间作为外部循环,内部循环为 Frank-Wolfe 迭代过程.步骤如下:

第一步 初始化.确定初始可行解 $\{x_a^{(0)}(i)\}$, $\{u_a^{(0)}(i)\}$, $\{v_a^{(0)}(i)\}$ 以及初始估计走行时间 $\{\tau_a^{(m)}(i)\}$,
设外部循环次数 $m = 1$.

第二步 Frank-Wolfe 迭代过程.设内部循环次数 $n = 1$.

- a. 应用最新的最优解更新路段走行时间 $\{\tau_a^{(n)}(i)\}$,计算 $\{t_{1a}(i)\}$, $\{t_{2a}(i)\}$, $\{t_{3a}(i)\}$.
- b. 根据目前 $\{t_{1a}(i)\}$, $\{t_{2a}(i)\}$, $\{t_{3a}(i)\}$ 调用 LP 求解器,得可行解 $\{p_a(i)\}$, $\{q_a(i)\}$, $\{y_a(i)\}$.
- c. 一维寻优,寻找最优步长.
- d. 沿最优步长移动,获得新的最优解 $\{x_a^{(n)}(i)\}$, $\{u_a^{(n)}(i)\}$, $\{v_a^{(n)}(i)\}$.
- e. 判断.如果 n 等于事先给定的次数,则转向第三步;否则,令 $n = n + 1$ 转向 a.

第三步 判断是否收敛,如果 $\tau_a^{(m)}(i) \approx \tau_a^{(m-1)}(i)$,满足精度要求,则停止,得到近似最优解 $\{x_a(i)\}$,
 $\{u_a(i)\}$, $\{v_a(i)\}$;否则, $m = m + 1$ 转向第二步.

4 动态用户最优分配模型仿真研究

根据上述算法,作者用 C++ 语言编写了以 5 条弧、一个 OD 对、7 个时间段为例的简单网络仿真程序,见图 1 表 1.在此模型中,定义瞬时路段走行时间:

$$\tau_a(i) = c_a(i) = g_{1a}(i) + g_{2a}(i)$$
$$g_{1a}(i) = \beta_{1a} \quad g_{2a}(i) = \beta_{2a}[x_a(i)]$$

式中 β_{1a} , β_{2a} 见表 2.由于篇幅所限,只给出路段1-2的仿真结果,见表 3,具体见文献[2].

对于实际的车辆数应取仿真结果的整数,由表 3 的仿真结果可得从 1 到 4 的瞬时路径走行时间(s),见表 4.

从表 4 可以看出,路径1-2-4,1-3-4在每个时段的走行时间近似相等,而路径1-3-2-4在每个时段的走行时间高于其他路径,所以在 3-2 路段很少接受车流量;在时段 3,我们可以看到,路径1-2-4,1-3-4均有比较高的走行时间(4.63 s 和 4.67 s),所以导致有 2.3 辆车进入路段3-2.

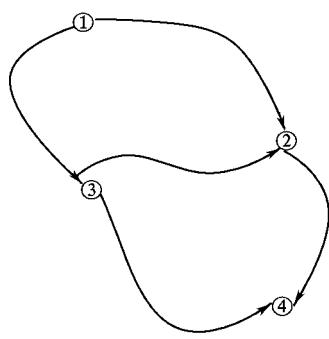


图 1 仿真网络
Fig.1 Test network

表 1 各时段的 OD 交通量
Table 1 OD traffic volume for each time interval

时段 i	1	2	3	4	5	6	7
$S_{1d}(i)$	25.0	15.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

表 2 路段的走行时间函数系数
Table 2 Parameters of travel time functions

路段 α	$\beta_{1\alpha}$	$\beta_{2\alpha}$
1-2	1.0	0.0057
1-3	1.0	0.0080
3-2	1.0	0.0010
2-4	1.0	0.0030
3-4	1.0	0.0070

表 3 部分仿真结果

Table 3 Part of emulation result

i	a	$x_a(i)$	$u_a(i)$	$v_a(i)$	$\tau_a(i)$	i	a	$x_a(i)$	$u_a(i)$	$v_a(i)$	$\tau_a(i)$
1	1-2	0.00	13.59	0.00	1.00	5	1-2	7.89	0.00	0.90	1.36
2	1-2	13.59	7.99	0.10	2.05	6	1-2	6.99	0.00	6.99	1.28
3	1-2	21.48	0.00	13.49	3.63	7	1-2	0.00	0.00	0.00	1.00
4	1-2	7.99	0.00	0.10	1.36						

表 4 瞬时路径走行时间

Table 4 Instantaneous route travel time

时段 i	1-2-4	1-3-4	1-3-2-4	时段 i	1-2-4	1-3-4	1-3-2-4
1	2.00	2.00	3.00	5	2.52	2.61	3.53
2	3.05	3.04	4.04	6	2.28	2.21	3.18
3	4.63	4.67	5.67	7	2.15	2.16	3.15
4	2.91	2.96	3.94				

参考文献 :

[1] Boyce D E. Solving an instantaneous dynamic user-optimal choice mode[J]. Transpn Sci , 1995 29(2) : 128 ~ 142.
[2] 郑长江. 动态交通分配方法及其初步应用研究[D]. 南京 : 东南大学 , 2000.

Emulation of Dynamic User-Optimal Assignment Model

ZHENG Chang-jiang , CAI Liang , CAO Xue-shan

(College of Traffic and Ocean Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China)

Abstract : According to the optimal control theory , a dynamic user optimal assignment model is developed for prediction of temporal traffic flow patterns under the control of the management center on a congested multiple origin destination network , and an algorithm for the discrete form of the model is discussed . The result of emulation by computers based on the Frank-Wolf algorithm shows that the model is effective .

Key words : dynamic user optimization ; dynamic traffic assignment ; path ; temporal