

广义有限元及其应用

邵国建, 刘体锋

(河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 基于传统有限元理论, 吸收数值流形方法中有限覆盖技术, 将每个结点位移的 Lagrange 型插值空间推广为具有任意多个广义位移的函数展开式, 给出了广义四结点等参单元的有限元列式. 结合算例探讨了广义有限元的数值实施措施, 针对复杂结构形式, 提出广义有限元与传统有限元的联合运用, 从而解决计算效率和精度这一问题. 算例结果表明了本文方法的合理性.

关键词 有限元; 广义位移; 广义有限元; 基础梁

中图分类号 TU311.0241.82

文献标识码 A

文章编号 1000-198X(2002)04-0028-04

为了分析模拟材料和工程结构的特征, 相继建立了许多数值模型和计算方法, 如有限元法、离散单元法、无单元法、数值流形方法等. 各种模型和方法在不同领域均发挥了积极的作用. 众所周知, 传统有限元法理论基础成熟, 原理简明, 已被大众所接受, 在工程实际问题的数值模拟中占有绝对的主导地位. 因此, 若能对传统有限元法有任何合理改进, 使其精度提高或拓宽其应用领域, 必将具有一定的学术意义和工程应用价值.

石根华^[1]提出的数值流形方法中将结点作为物理覆盖, 通过提高定义在覆盖上的局部逼近函数的阶数, 从而提高流形方法总体求解的精度. 梁国平在文献[2]中吸收了流形方法的有限覆盖思想, 用于改进传统有限元的计算上, 提出了广义有限元的概念, 并从数学上论证了广义有限元方法的可行性. 由于广义有限元的自由度全部定义在结点上, 而不像 P-version 方法那样定义在单元上, 因此容易被传统的有限元程序接受, 并且由于其协调性总能保证, 故不同结点的多项式的阶次可以按照问题的需要任意选取.

文献[3, 4]采用同一思想, 建立了广义结点有限元的数值实施列式. 本文在上述作者工作的基础上, 采用广义结点等参单元的有限元列式解决实际问题, 并在数值实施过程中探讨了相关处理措施, 提出根据实际问题的结构形式, 可采用广义有限元和传统有限元的联合运用, 从而既可提高解答的精度, 也可提高计算效率.

1 广义有限元的概念^[2, 3]

设 S_h 为传统有限元空间, 采用 Lagrange 型基函数为 $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$, 则传统有限元位移近似解可表示为

$$u^h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i \quad (1)$$

其中结点位移 $u_i (i=1, 2, \dots, N)$ 将通过离散化虚功方程所对应的代数方程组求解得到.

现构造新的逼近空间, 将传统有限元中结点位移广义化, 认为每个结点位移 u_i 具有任意多个广义位移的展开式, 即

$$u_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{M_i} \begin{bmatrix} f_{ij}(x, y) & 0 \\ 0 & f_{ij}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i, 2j-1} \\ d_{i, 2j} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得到新的逼近空间

$$u^h = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \begin{bmatrix} f_{ij}(x, y) & 0 \\ 0 & f_{ij}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i, 2j-1} \\ d_{i, 2j} \end{Bmatrix} \varphi_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \varphi_i \mathbf{D}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i \mathbf{D}_i \quad (3)$$

式中: $\mathbf{D}_i$ ——结点广义位移列阵, $\mathbf{D}_i = [d_{i, 1}, d_{i, 2}, \dots, d_{i, m}]^T$; $\mathbf{N}_i$ ——新的插值函数矩阵. 由于在新的插值函数

N_i 中包含有传统有限元中的插值函数 φ_i , 因此广义有限元的协调性自然得到保证. 由此构造出新的有限元插值方法称为广义有限元. 显然, 当取 $M_i = 1$ 及 $f_{ij}(x, y) = 1$ 时, 式(2)即退化为

$$u_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

此时, 广义有限元便退化为传统有限元方法.

对于复杂问题的微分方程及其解在求解区域的不同地方往往有不同的特性, 需要采用不同类型的逼近函数. 从式(2)中可看出, 对不同的结点 i 可以采用完全不同的插值函数 $f_{ij}(x, y)$, 从而对不同结点可采用不同的有限元插值函数, 新的逼近空间很容易满足此要求.

2 广义四结点等参单元

2.1 广义形函数

针对传统有限元中的四结点等参单元, 广义有限元的单元位移函数可表示为

$$u_e = N_e D_e \tag{5}$$

式中: D_e ——单元的广义位移列阵; N_e ——单元的位移插值矩阵, 称为广义形函数矩阵. 广义形函数与传统有限元的形函数 ϕ 之间的关系为

$$N_i = \phi_i F_i \tag{6}$$

式中: F_i ——结点位移的插值函数(该函数作为真实场函数的局部近似, 可人为选取).

结点的广义位移个数与结点的插值函数的阶数应具有——对应关系. 对 0 阶的结点位移值函数 $F_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D_i = \begin{Bmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \end{Bmatrix}$ 对应每个结点有两个自由度, 即为传统有限元法.

a. 1 阶的结点位移插值函数

$$F_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix} \quad D_i = [d_{i,1}, d_{i,2}, d_{i,3}, \dots, d_{i,6}]^T$$

对应每个结点具有 6 个自由度.

b. 2 阶的结点位移插值函数

$$F_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy & 0 & x^2 & 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy & 0 & x^2 & 0 & y^2 \end{bmatrix} \quad D_i = [d_{i,1}, d_{i,2}, \dots, d_{i,12}]^T$$

对应每个结点具有 12 个自由度.

随着结点位移的插值函数阶次的提高, 广义形函数的阶次也相应提高. 考虑实际工程的应用和精度要求, 本文主要讨论 1 阶结点位移插值函数情形, 即对应每个结点具有 6 个自由度的问题. 此时, 结点的广义形函数为

$$N_i = \phi_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{7}$$

2.2 应变矩阵

针对 1 阶的结点位移插值函数, 由几何方程有

$$\varepsilon = Lu_e = BD_e = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4] D_e \tag{8}$$

其中

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial (x\phi_i)}{\partial x} & 0 & \frac{\partial (y\phi_i)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial (x\phi_i)}{\partial y} & 0 & \frac{\partial (y\phi_i)}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & \frac{\partial (x\phi_i)}{\partial y} & \frac{\partial (x\phi_i)}{\partial x} & \frac{\partial (y\phi_i)}{\partial y} & \frac{\partial (y\phi_i)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{9}$$

式(9)就为对应 1 阶的结点位移插值函数的应变矩阵中的各子矩阵.

2.3 单元劲度矩阵

若用 E 表示弹性矩阵,仿传统有限元方法推导,由虚功原理可导出单元劲度矩阵为

$$k = \int_A B^T E B t dx dy$$

(10)

单元劲度矩阵可用 16 个子矩阵表示,对任一子矩阵 k_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) 可写成

$$k_{ij} = \int_A B_i^T E B_j t dx dy$$

(11)

对于 1 阶的结点位移插值函数而言, k_{ij} 为 6×6 阶的矩阵,显然单元劲度矩阵为 24×24 阶的矩阵.

3 几点说明

3.1 程序实施

由于广义有限元与传统有限元一样,自由度均定义在单元结点上,因此广义有限元程序研制与传统有限元方法类似,可直接在传统有限元程序上修正实施,主要修改涉及到应变矩阵和单元劲度矩阵.根据单元实际应变和应力的变化规律,对于传统四结点等参单元的单元劲度矩阵,高斯积分点为 4 个,由于阶次的提高(较传统四结点等参单元被积函数阶次至少要高一次),对广义四结点等参单元计算单元劲度矩阵宜采用 9 个高斯积分点,相应结点载荷按结点位移的插值函数形式等效为 6 个自由度上的列阵.

3.2 成果整理

由于广义有限元中结点的自由度为广义位移,这些广义位移不一定都具有各自的物理意义,故在求得结点的广义位移后,再按结点的位移插值函数求得具有物理意义的结点位移.

在整理应力成果时,对传统四结点等参单元的应力佳点在单元形心处,而对广义结点等参单元其单元应力佳点并非在单元形心.为了求得单元形心处的应力值,可先求得广义四结点等参单元的 4 个高斯点上的应力值,再将 4 个高斯点处的应力平均值作为单元形心处的应力值,其结果较为理想.

3.3 广义有限元与传统有限元的联合运用

为了解决实际问题的计算效率和精度这一问题,可针对具体实际问题的结构形式或所关心问题的区域,将广义有限元与传统有限元联合运用.因为广义有限元中结点位移的插值多项式阶次可以按照问题的需要任意选取,而不影响位移的协调性问题.对广义四结点等参单元中按 1 阶的结点位移插值函数建立的程序,因此时每一个结点有 6 个广义位移(自由度),只要将某些结点后 4 个自由度施加约束,那么就自然退化成传统有限元的结点位移.由此只要对约束信息作适当的处理,无需修改程序就可完成广义有限元与传统有限元的联合运用.

4 算例分析

4.1 简支梁问题

简支梁受均布横向载荷,由于对称,取一半进行有限元数值计算.如图 1 所示,弹性模量 $E = 2 \times 10^7$ Pa,泊松比 $\mu = 0.2$,梁厚度 $t = 1.0$ m,作为平面应力问题.分别用传统四结点等参元(Q4)和广义四结点等参元(GQ4)进行分析,结果列于表 1.表中结果表明广义有限元在解决弯曲问题时较传统有限元精度要高得多.

表 1 不同网格下 1 号单元形心处的轴向应力

Table 1 Axial stress at the centre of

No.1 element

Pa

方法	Q4	GQ4	理论解
网格 a	-348.3	-930.9	-944.1
网格 b	-523.6	-1311.1	-1417.4

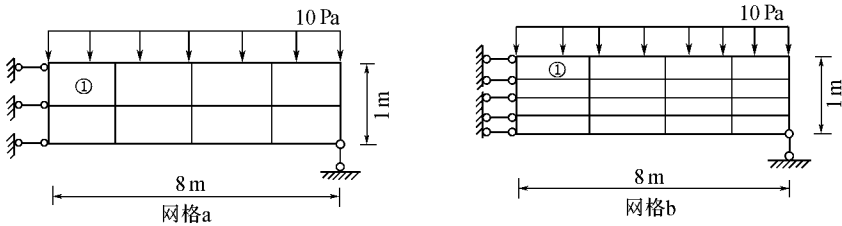


图 1 简支梁问题
Fig.1 Simple support beam problem

4.2 基础梁问题

图 2 为一平面变形情况下的基础梁,宽度 t 取为 1 m ,高为 1.8 m ,长为 10 m ,支承在 10 m 厚的土层上,受均布载荷 196 kPa .取基础梁 $E = 19.6\text{ GPa}$, $\mu = 0.17$.用图示的网格计算右边的一半,而在对称面上的各结点处加水平向约束.土层下方的岩基作为刚固.梁端以外弹性土层的范围取为 1.5 倍梁长,即 15 m .土层的弹性模量 E_0 取为 9.8 MPa (相应于较软的土壤),泊松比 μ_0 取为 0.3 .

考虑到基础梁与土层的变形特性,将基础梁采用广义四结点有限元、土层采用传统四结点有限元进行求解.求得基础梁中央截面梁顶点向下挠度为 11.57 cm ,基础梁中央截面梁底层单元形心处的水平向拉应力约为 518 kPa .对同一问题,若全部采用传统四结点有限元计算,得到基础梁中央截面顶点向下挠度为 11.43 cm ,基础梁中央截面梁底层单元形心处的水平向拉应力为 502 kPa .结果表明,仅在局部区域采用广义有限元,在局部增加求解自由度个数的情况下,就可得到计算精度较高的结果.

5 结 语

广义有限元提出了一类新的逼近空间,拓广了传统有限元的空间,并保持了传统有限元空间的协调性.广义有限元的程序研制仅在现有传统有限元程序的基础上适当修改即可,对传统有限元方法的前后处理仍然可直接利用.算例结果表明,对具有弯曲这一类型的问题采用广义有限元法较传统有限元法的计算精度大大得到提高.因广义有限元与传统有限元一样,自由度均定义在结点上,并且不同结点的位移插值函数的阶次可按照问题的需要而任意选取,故对具有不同结构形式的实际问题可采用广义有限元与传统有限元联合运用,并且仅对结点约束信息作适当处理即可实现,从而表明本文方法的优越性和可行性.

参考文献:

[1] 石根华著.数值流形方法与非连续变形方法[M].裴觉民译.北京:清华大学出版社,1997.1~14.
[2] 梁国平,何江衡.广义有限元方法[J].力学进展,1995,25(4):562~565.
[3] 栾茂田,田荣,杨庆.广义节点有限元[J].计算力学学报,2000,17(2):192~200.
[4] 田荣,栾茂田,杨庆.广义节点有限元及其高阶形式[J].大连理工大学学报,2000,40(4):200~205.

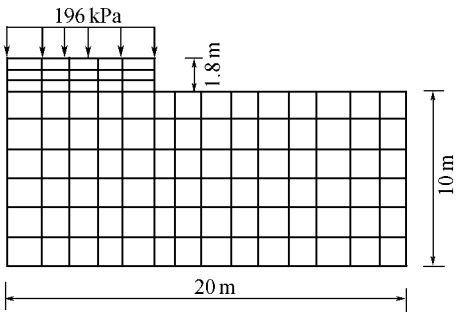


图 2 基础梁问题
Fig.2 Foundation beam problem

Generalized finite element and its application

SHAO Guo-jian, LIU Ti-feng

(College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: Based on the conventional finite element, by use of the finite cover technique in the numerical manifold method, the Lagrange interpolation space for displacement of each node is expanded to a function expansion with any number of generalized displacements, and formulae of generalized four-node iso-parametric finite element are given. In combination with numerical examples, the numerical measures for generalized finite element are discussed. Besides, the generalized finite element is also combined with the conventional finite element for treatment of complicated structures, improving the efficiency and precision of computation. The results of numerical examples show that the method is rational.

Key words: finite element; generalized displacement; generalized finite element; foundation beam