

物理各向异性的有限单元法研究

丰土根¹,周 洪²,刘汉龙¹,严跃南³,刘勇军⁴,

(1.河海大学岩土工程研究所,江苏 南京 210098;2.常州市交通工程总公司,江苏 常州 213022;
3.连云港市水利局,江苏 连云港 222004;4.河海大学水利水电工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 针对物理各向异性由于拉压模量不同而有自己独特的本构关系,阐述了物理各向异性的弹性基本方程,推导了物理各向异性的有限单元法,并阐明了有限单元法的求解过程.最后用算例进行了验证.

关键词 物理各向异性 有限单元法 试算法

中图分类号 O241.82 文献标识码 A 文章编号 1000-1980(2002)04-0071-04

物理各向异性习惯称拉压模量不同.传统的弹性力学大多只讨论拉压时弹性系数相同的情形,很少涉及拉压时弹性系数不同的情形.而有些材料,如部分土、岩石、混凝土等,拉压时弹性系数并不相同,有时甚至相差很大,传统的弹性力学显然不再适用,需要用拉压模量不同的弹性理论才能对其进行弹性分析.拉压模量不同的主要难点是计算前事先要判断一点的主应力是拉应力还是压应力,以便在物理方程中确定 E 和 μ 是取 E^+ 和 μ^+ 还是取 E^- 和 μ^- ,而一点的主应力符号在通常情况下只有在计算后才能知道.

1 物理各向异性的基本方程

平衡方程及几何方程与材料性质无关,要引进的是物理方程.先考虑主应力与主应变关系的形式,设 3 个主应力为 $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma$,它们是拉还是压,有下面 8 种组合,其中 3 个主应力同号的共 2 种;异号的 6 种,分两正一负和两负一正两类.指定同号的两个为 σ_α 和 σ_γ ,异号的总为 σ_β ,那么这 8 种组合可合并为 4 种.取坐标系与主向重合,应力应变关系为

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_\alpha \\ \epsilon_\beta \\ \epsilon_\gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \sigma_\beta \\ \sigma_\gamma \end{Bmatrix} \quad \gamma_{\alpha\gamma} = \gamma_{\beta\gamma} = \gamma_{\alpha\beta} = 0 \tag{1}$$

实验证明,对多数材料 $\frac{\mu^+}{E^+} = \frac{\mu^-}{E^-}$,这样, $a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32}$,也即独立的参数只有 E^+, E^-, μ^+ (或 μ^-) 3 个.4 种情形的 a_{ij} 列表如表 1.

表 1 不同符号的应力对应的弹性系数

Table 1 Elasticity coefficients corresponding to stresses with different signs

矩阵元素	$\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma > 0$	$\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma < 0$	$\sigma_\alpha, \sigma_\gamma > 0, \sigma_\beta < 0$	$\sigma_\alpha, \sigma_\gamma < 0, \sigma_\beta > 0$
a_{11}	$\frac{1}{E^+}$	$\frac{1}{E^-}$	$\frac{1}{E^+}$	$\frac{1}{E^-}$
a_{12}	$-\frac{\mu^+}{E^+} (= -\frac{\mu^-}{E^-})$	$-\frac{\mu^-}{E^-}$	$-\frac{\mu^-}{E^-}$	$-\frac{\mu^+}{E^+}$
a_{22}	$\frac{1}{E^+}$	$\frac{1}{E^-}$	$\frac{1}{E^-}$	$\frac{1}{E^+}$
a_{33}	$\frac{1}{E^+}$	$\frac{1}{E^-}$	$\frac{1}{E^+}$	$\frac{1}{E^-}$

一般地,称主应力同号的区域为第 1 类区域,而主应力不同号的区域为第 2 类区域.由定义知,第 1 类区域可采用经典的各向同性弹性理论,只是弹性常数有正负之分,需要讨论的是第 2 类区域.

在一般情形下各点的应力主向并不相同,因此,上述主应力及主应变建立的物理方程使用时并不方便,需要用应力及应变转轴公式把应力-应变关系写成任意笛卡尔坐标系都适用的形式(图 1).设坐标轴 x, y, z 与应力主向 α, β, γ 的夹角方向余弦如表 2 所示,则可推导出第 2 类区域的物理方程为^[1]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2A+B & B & B & & & \\ & B & 2A+B & B & & \\ & & B & 2A+B & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \sigma_\beta \begin{Bmatrix} B_3(B+2Am_1^2) \\ B_3(B+2Am_2^2) \\ B_3(B+2Am_3^2) \\ 2B_3Am_2m_3 \\ 2B_3Am_3m_1 \\ 2B_3Am_1m_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

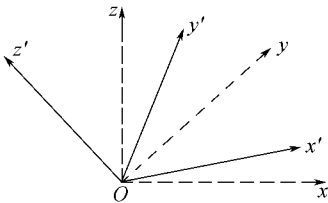


图 1 应力主向与笛卡尔坐标系示意图

表 2 应力主向方向余弦

Table 2 Cosine of stress principal direction			
坐标轴	α	β	γ
x	l_1	m_1	n_1
y	l_2	m_2	n_2
z	l_3	m_3	n_3

其中 $A = \frac{1}{2(a_{11} - a_{12})}$, $B = -\frac{a_{12}}{(a_{11} - a_{12})(a_{11} + 2a_{12})}$, $B_3 = a_{22} - a_{11}$. 在等式右边,第 1 项的弹性矩阵形式上与各向同性的弹性矩阵一致,可把第 2 项看作是由于拉压模量不同对物理方程的修正.因 $\sigma_\beta, m_1, m_2, m_3$ 均为 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ 的函数,同时也是应变的函数,所以式(2)可以写成矩阵形式:

$$\sigma = (D + D') \epsilon \quad (3)$$

式中 D ——常规的各向同性项; D' ——修正项,

$$D' = \sigma_\beta \begin{bmatrix} \frac{B_3(B+2Am_1^2)}{\epsilon_x} & & & & & \\ & \frac{B_3(B+2Am_2^2)}{\epsilon_y} & & & & \\ & & \frac{B_3(B+2Am_3^2)}{\epsilon_z} & & & \\ & & & \frac{2B_3Am_2m_3}{\gamma_{yz}} & & \\ & & & & \frac{2B_3Am_3m_1}{\gamma_{zx}} & \\ & & & & & \frac{2B_3Am_1m_2}{\gamma_{xy}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

另外,由于应力主向和 σ_β 事先并不知道,所以 $\sigma_\beta, m_1, m_2, m_3$ 等均为未知项,也即修正项 D' 未知,这给求解带来一定的难度.

2 有限元法

在第 1 类区域中平衡方程、几何方程及物理方程均等同于各向同性,其有限元法和常规各向同性有限元类似,但在第 2 类区域中物理方程系数中还带有未知项,在求解前并不知道,只有待求解和用转轴公式变换后进行判断才能得知.这样,传统的有限单元法无法解决这些问题,必需推导出修正的有限元法来解决.

最小位能原理的泛函总位能 $\Pi_p^{[2]}$ 为

$$\Pi_p = \int_V (\frac{1}{2} D_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - \bar{f}_i u_i) dV - \int_{S_\sigma} T_i u_i dS \tag{5}$$

离散型的总位能是各单元位能之和,即

$$\Pi_p = \sum_e (a^{eT} \int_V \frac{1}{2} B^T (D + D') B dV a^e) - \sum_e (a^{eT} \int_V N^T f dV) - \sum_e (a^{eT} \int_{S_\sigma} N^T T dS) \tag{6}$$

式中 : a^e ——位移列阵 ; B ——应变矩阵 ; N ——形函数矩阵 ; f ——体力列阵 ; T ——面力列阵.

令

$$\int_V B^T D B dV = K^e \qquad \int_V B^T D' B dV = K^{e'}$$
$$\int_V N^T f dV = P_b^e \qquad \int_{S_\sigma} N^T T dS = P_s^e \qquad P^e = P_b^e + P_s^e$$

式中 : K^e ——单元刚度矩阵 ; $K^{e'}$ ——修正单元刚度矩阵 ; P^e ——单元等效节点载荷列阵.

将以上各式代入式(5),集成后得

$$\Pi_p = \frac{1}{2} a^T (K + K') a - a^T P \tag{7}$$

离散形式的总位能 Π_p 的未知变量是节点位移列阵 a ,根据变分原理,对泛函 Π_p 取驻值的条件是它的一次变分为零, $\delta \Pi_p = 0$,即

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial a} = 0 \tag{8}$$

可以得到此有限元的求解方程为

$$(K + K') a = P \tag{9}$$

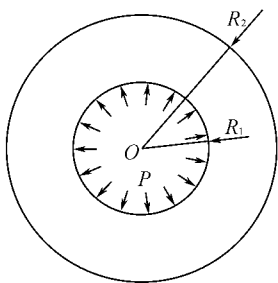
由于 K' 事先是不知道的,可通过试算法迭代求得,其方法是 :先假定 $K' = 0$,即按拉压模量相同求解,再求得主应力及主方向,然后判断各单元属于哪类区域.如果是第 1 类区域,应区分是拉还是压.如果是压,不用变动.如果是拉,必须将弹性系数 E^+ 和 μ^+ 改为 E^- 和 μ^- ,重新生成 K 矩阵.如果是第 2 类区域,根据受拉主应力和主方向可求得 D' ,进而求得 K' ,然后再重复求解.如果再出现新的受拉主应力,就再循环一次,直至不再出现新的受拉主应力为止.另外要注意的是,在有些时候,比如说求得主压应力接近于零时,可能此主应力为主拉应力,这时可暂假设其为主压应力,用修正后的刚度矩阵回代求解.如果解出后仍为主压应力,则可断定其为主压应力.如果求解结果为主拉应力,则这个主应力为主拉应力,不再改变.

利用以上原理和步骤可编得实用有限元程序.

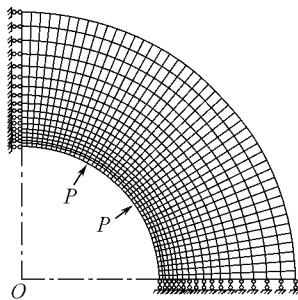
3 算 例

求厚壁圆环的轴对称问题,设圆环的内半径为 R_1 ,外半径为 R_2 , $r = R_1$ 处作用法向荷载 P ,如图 2 所示.由于几何及荷载对称, $\tau_{\theta} = 0$,端面元荷载属平面应力问题.根据物理直觉, σ_θ 应都是拉应力, σ_r 都是压应力,均属于第 2 类区域,其解析解为

$$\sigma_r = \frac{PR_2 m^{a+1}}{(1 - m^{2a})} (R_2^{-a} r^{a-1} - R_2^a r^{-a-1}) \qquad \sigma_\theta = \frac{\alpha PR_2 m^{a+1}}{(1 - m^{2a})} (R_2^{-a} r^{a-1} + R_2^a r^{-a-1}) \tag{10}$$



(a) 厚壁圆环



(b) 单元离散及约束

图 2 厚壁圆环及单元离散

Fig.2 Heavy-wall cirque and its element discretization

其中 $m = R_1/R_2, \alpha = \sqrt{E^+/E^-}$. 令 $R_1 = 1\text{ m}, R_2 = 2\text{ m}, P = 10\text{ MPa}, E^+ = 20\text{ GPa}, E^- = 10\text{ GPa}$, 则由式(9)可算得结果如图 3 所示.

用有限元法进行计算,取圆环的 1/4 进行离散,加上约束,如图 2 所示. 用本文介绍的有限元法计算,即先假定为各向同性,求出后判断各单元属哪类区域,然后修正计算,所得结果如图 3 所示.

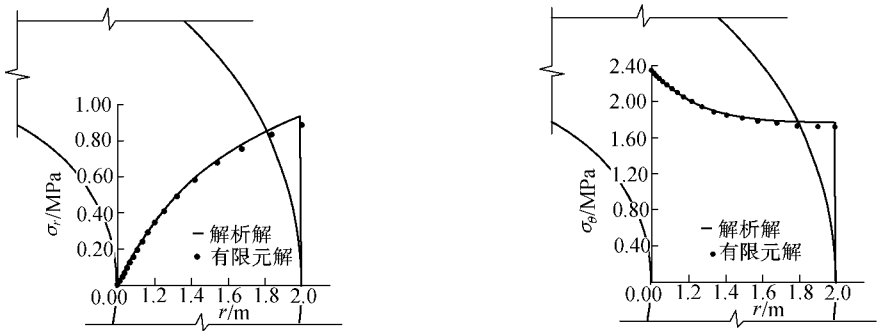


图 3 解析解及有限元解
Fig.3 Analytic solution and FEM solution

由图 3 可以看出,解析解和有限元解比较接近,剔除有限元自身误差,可认为是相等的.

4 结 语

- a. 物理各向异性的物理方程含有不可知项,需要根据应力状态确定,而应力状态的确定又依赖于物理方程,这是一对矛盾,给求解带来一定的难度.
- b. 利用有限单元法可较好地求得物理各向异性的解,本文推导出有限元的求解方程和求解过程. 通过算例,验证了有限元求解的有效性.

参考文献:

[1] 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1994. 291 ~ 302.
[2] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 1988. 43 ~ 49.

FEM for physical anisotropy

FENG Tu-gen¹, ZHOU Hong², LIU Han-long¹, YAN Yue-nan³, LIU Yong-jun⁴

- (1. Research Institute of Geotechnical Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China ;
- 2. Changzhou Traffic Engineering General Co., Changzhou 213022, China ;
- 3. Lianyungang Water Resources Bureau, Lianyungang 222004, China ;
- 4. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract : Based on the fact that physical anisotropy has its own stress-strain equation due to the difference between the tensile modulus and the compressive modulus, the basic equation of physical anisotropy is expounded, the FEM for physical anisotropy is derived, and the process of solution is introduced. Finally, the method is verified by examples.

Key words : physical anisotropy ; FEM ; trial method