

非线性 Carrier 方程解的能量衰减估计

张迎周, 陈才生

(河海大学理学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 证明了具有阻尼项的非线性 Carrier 方程

$$u_{tt} - M(\|u\|_2^2)\Delta u + \alpha(u_t) = f(u) \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$$

解的能量具有代数衰减特征, 其中 $\sigma(\nu) \geq 0$, $0 < m_0 \leq M(s)$, $f(u)$ 连续可微和初始数据没有“适当小”的假定.

关键词: 非线性 Carrier 方程, 能量衰减估计, 阻尼项

中图分类号: O175 文献标识码: A 文章编号: 1000-198X(2002)05-0017-06

本文研究具有阻尼项的非线性 Carrier 方程的初边值问题

$$u_{tt} - M(\|u\|_2^2)\Delta u + \alpha(u_t) = f(u) \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega; u(x, t) = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (2)$$

解的能量衰减估计. 其中 $\alpha(u_t)$ 和 $f(u)$ 分别具有 $|u_t|^\rho u_t$ ($\rho \geq 1$) 和 $|u|^{q-1}u$ ($q > 1$) 的形式, Ω 是 R^N 中的有界区域, 边界 $\partial\Omega$ 光滑. 方程(1)描述了当张力变化不是很小时, 两端固定弹性弦的振动^[1]. [2]中的定理说明了方程(1)的解是存在的且满足 $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$. 这是本文研究的基础. 当 $M(\|u\|_2^2)$ 被 $M(\|\nabla u\|_2^2)$ 取代时, 方程(1)就是著名的 Kirchhoff 方程. 许多学者对其进行了广泛而深刻的研究, 并得到了一系列的结果^[3~6]. 对 Carrier 方程(1)的研究结果还比较少.

文献[7]中考虑了方程

$$u_{tt} - M(\|u\|_2^2)\Delta u + \alpha(u_t) = f(x, t) \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$$

解的存在性, 并给出了 $f \equiv 0$ 时解的能量衰减估计. 当方程(1)中 $M(\|u\|_2^2) \equiv 1$ 时, 文献[8, 9]证明了其解的存在和惟一性, 以及解的能量代数衰减估计. 我们由此得到启发, 从而证明了方程(1)解的能量估计. 这里不需要作初值 u_0 和 u_1 在某种意义下“适当小”的假定.

为简单起见, 在本文最后考虑了 $\alpha(u_t) = |u_t|^\rho u_t + \delta u_t$, $f(u) = |u|^{q-1}u$ 的情况.

1 准备知识和主要结果

本文中, 记 $u'(t) = u_t$, $u''(t) = u_{tt}$. 用 $\|\cdot\|_p$ 和 $\|\cdot\|_{k,p}$ 分别表示空间 $L^p(\Omega)$ 和 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的范数, $1 \leq p \leq \infty$, 而当 $p = 2$ 时, $L^2(\Omega)$ 是 Hilbert 空间, 其内积定义为

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \quad u, v \in L^2(\Omega)$$

为方便起见, 也采用记号 $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ 和 $W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$. 下面的 3 个引理对本文的结论很重要.

引理 1^[3] 设 $u \in H_0^1(\Omega)$, $1 \leq q \leq (N+2)/(N-2)$ ($N \geq 3$) 或 $1 \leq q < +\infty$ ($N = 1, 2$), 则存在有界正常数 $\alpha(|\Omega|, q+1)$ (其中 $|\Omega|$ 为区域 Ω 的测度), 使得

$$\|u\|_{q+1} \leq \alpha(|\Omega|, q+1) \cdot \|\nabla u\|_2$$

也就是说

$$\alpha(\Omega, q+1) = \sup\{\|u\|_{q+1}/\|\nabla u\|_2 \mid u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0\} \quad (3)$$

引理2^[3,7,8] 设 $u \in W^{m,p}$, $1 \leq r < q \leq +\infty$, $p \leq q$, 则存在 $C > 0$, 使得

$$\|u\|_{W^{k,q}} \leq C \|u\|_{W^{m,p}}^{\theta} \|u\|_r^{1-\theta} \quad (4)$$

其中 $\theta = (k/N + 1/r - 1/q)(m/N + 1/r - 1/p)^{-1}$, $0 < \theta \leq 1$.

引理3^[9,10] 设 $\phi(t)$ 是 $[0, T]$ 上非负的非增函数, $\gamma > 0$, $K_0 > 0$, 满足

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} \phi^{1+\gamma}(s) \leq K_0(\phi(t) - \phi(t+1)) \quad (5)$$

则存在只依赖于 $\phi(0)$ 的 $C_0 > 0$, 使得

$$\phi(t) \leq C_0(1+t)^{-1/\gamma} \quad t \geq 0$$

现对 $M(s)$, $\alpha(u_t)$ 和 $\mathcal{K}(u)$ 作如下的假设. 假设 I 函数 $M(s)$ 对所有的 s , 存在 $k_0 > 0$, 使得

$$M(s) \in C^1([0, \infty)) \quad 0 < m_0 \leq M(s), \text{ 且 } |M'(s)s^{\frac{1}{2}}|/M(s) \leq k_0 \quad (6)$$

假设 II $\alpha(v) \in C^1(R \setminus \{0\}) \cap C(R)$, 存在 $k_1, k_2 > 0$, $\rho \geq 1$, 使得

$$k_1 \min\{|v|^2, |v|^{\rho+2}\} \leq \alpha(v) \cdot v \quad (7)$$

和

$$|\alpha(v)| \leq k_2(\alpha(v)v)^{\rho+1}(\rho+2) + |v|, \quad \sigma'(v) \geq 0 \quad (8)$$

假设 III:

$$\mathcal{K}(u) \in C^1(R), \quad |\mathcal{K}(u)| \leq \mu |u|^q, \quad \mu > 0, q > 1 \quad (9)$$

令 $F(u) = \int_0^u \mathcal{K}(\eta) d\eta$, 则存在 $\alpha, k_3 > 0$, 使得

$$\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{m_0} \int_{\Omega} \mathcal{K}(u) u dx \geq \alpha \left(\|\nabla u\|_2^2 - \frac{2}{m_0} \int_{\Omega} F(u) dx \right) \geq k_3 \|\nabla u\|_2^2 \quad (10)$$

$$\text{记 } \Psi(t) = \|u'\|_2^2/M(t) + \|\nabla u\|_2^2 - \frac{2}{m_0} \int_{\Omega} F(u) dx \quad M(t) = M(\|u(t)\|_2^2) \quad (11)$$

$$E(t) = \|u'\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \quad (12)$$

$$\varphi(t) = \|u'\|_2^2/M(t) + \|\nabla u\|_2^2 - \frac{2}{m_0(q+1)} \|u(t)\|_2^{q+1} \quad (13)$$

$$\mathcal{K}(u) = \|\nabla u\|_2^2 - \frac{2}{m_0} \|u\|_2^{q+1} \quad (14)$$

$$V \equiv \{u \in H_0^1(\Omega) : \mathcal{K}(u) > 0\} \cup \{0\} \quad (15)$$

则由(10)(11)(13)(14)(15)知 $\Psi(t), \varphi(t)$ 均为非负函数.

本文的结论是:

定理1 设上述假设 I ~ III 均成立, 且 ρ 和 q 满足 (a) $1 \leq \rho < \infty$, $1 < q < \infty$ ($N=1, 2$) (b) $1 \leq \rho < 4$, $1 < q < \infty$ ($N=3$) (c) $4(N-2) < \rho < 4[N-4]^+$, $1 < q < (N-2)[N-4]^+$ ($N \geq 4$) (d) $\rho < \min\{q-1, (4-N)/2+1, 2\}$, 则对于问题(1)(2)的解, 存在 $C_1 > 0$, 使得

$$E(t) \leq C_1(1+t)^{-2/\rho} \quad t \geq 0$$

定理2 设(1)中 $\sigma(u_t) = |u_t|^{\rho} u_t + \delta u_t$, $f(u) = |u|^{q-1} u$, 假设 I 成立, (2)中 $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ 且

$$\frac{2}{m_0} [\alpha(\Omega, q+1)]^{q+1} \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{(q-1)/2} (\varphi(0))^{(q-1)/2} < 1 \quad (16)$$

如果 ρ 和 q 满足 (a) $1 \leq \rho < \infty$, $1 < q < \infty$ ($N=1, 2$) (b) $1 \leq \rho < 4$, $1 < q < 5$ ($N=3$) (c) $4(N-2) < \rho < 4[N-4]^+$, $1 < q < \min\{N-2, [N-4]^+, (N+2)(N-2)\}$ ($N \geq 4$) (d) $\rho < \min\{q-1, (4-N)/2+1, 2\}$, 则对于问题(1)(2)的解, 存在 $C_2 > 0$, 使得

$$E(t) \leq C_2(1+t)^{-2/\rho} \quad t \geq 0$$

2 定理1的证明

由[2]中的定理, 方程(1)的解满足 $u \in L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$. 于是对方程(1)两边乘以 $2u'$, 并在 Ω

上积分得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\| u' \|_2^2 / M(t) + \| \nabla u \|_2^2] + 2 \int_{\Omega} \sigma(u') u' dx / M(t) = \\ - 2 M'(t) \langle u', u \rangle \| u' \|_2^2 / M(t) + \mathcal{X} f(u') / M(t) \end{aligned} \quad (17)$$

在下面各式中,把与 x, t 无关的常数记为 C ,而 ε 为任意小的正数.由(6),有

$$2 | M'(t) \langle u', u \rangle | \langle M(t) \rangle^2 \| u' \|_2^2 \leq 2 K_0 \| u' \|_2^3 / M(t) \quad (18)$$

利用 Young 不等式,可得到

$$\begin{aligned} C \| u' \|_2^3 \leq (\rho - 1) \cdot C \frac{\rho}{\rho-1} \| u' \|_2^2 / \rho \varepsilon^{\frac{1}{\rho-1}} + \varepsilon \| u' \|_2^{\rho+2} / \rho \leq \\ (\rho - 1) C \frac{\rho}{\rho-1} \| u' \|_2^2 / \rho \varepsilon^{\frac{1}{\rho-1}} + \varepsilon C \| u' \|_2^{\rho+2} / \rho \end{aligned} \quad (19)$$

于是,由(7)(11)和(17)~(19),并适当选择 ε ,可存在 $m > 0$,使得

$$\Psi'(t) + m \int_{\Omega} \min\{|u'|^2, |u'|^{\rho+2}\} dx / M(t) \leq 0 \quad (20)$$

可见 $\Psi(t)$ 为非增函数.如果令 $D^{\rho+2}(t) = \Psi(t) - \Psi(t+1)$ 对式(20)在 $[0, t]$ 上积分得

$$\int_t^{t+1} \int_{\Omega} \min\{|u'(s)|^2, |u'(s)|^{\rho+2}\} dx ds \leq C D^{\rho+2}(t) \quad (21)$$

其中 $t \in [0, T-1]$, T 为最大存在时间(参见引理3).从而有

$$\int_t^{t+1} \int_{|u'| \leq 1} |u'(s)|^{\rho+2} dx ds \leq C D^{\rho+2}(t) \quad (22)$$

$$\int_t^{t+1} \int_{|u'| \leq 1} |u'(s)|^2 dx ds \leq C \left(\int_t^{t+1} \int_{|u'| \leq 1} |u'(s)|^{\rho+2} dx ds \right)^{\frac{2}{\rho+2}} \leq C D^2(t) \quad (23)$$

这样便有

$$\int_t^{t+1} \int_{\Omega} |u'|^2 dx ds = \int_t^{t+1} \|u'(s)\|_2^2 ds \leq C (D^2(t) + D^{\rho+2}(t)) \quad (24)$$

由中值定理,存在 $t_1 \in [t, t+1/4]$ 和 $t_2 \in [t+3/4, t+1]$,使得

$$\|u'(t_i)\|_2^2 \leq C (D^2(t) + D^{\rho+2}(t)) \quad (i = 1, 2) \quad (25)$$

由(10)和(11),可得

$$\Psi(t) \geq \|u'\|_2^2 / M(t) + k_3 \|\nabla u\|_2^{2/\alpha} \geq k_3 \|\nabla u\|_2^{2/\alpha} \quad (26)$$

利用嵌入定理,有

$$\|u\|_2^2 \leq C \|\nabla u\|_2^2 \leq C \Psi(t) \leq C \Psi(0) \quad (27)$$

另外,对方程(1)两边乘以 u ,并在 $\Omega \times (t_1, t_2)$ 上积分得

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\|\nabla u(s)\|_2^2 - \int_{\Omega} f(u(s)) u(s) dx / m_0) ds \leq (\int_{t_1}^{t_2} \|u'(s)\|_2^2 ds + \\ (u'(t_1), u(t_1)) - (u'(t_2), u(t_2))) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \sigma(u'(s)) \cdot u(s) dx ds / m_0 \end{aligned} \quad (28)$$

由(8)及 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \sigma(u'(s)) \cdot u(s) dx ds \leq k_2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [(\sigma(u') u')^{\frac{\rho+1}{\rho+2}} + |u'|] \cdot |u| dx ds \leq \\ C \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \sigma(u') u' dx ds \right)^{\frac{\rho+1}{\rho+2}} \cdot \left(\int_{t_1}^{t_2} \|u\|_{\rho+2}^{\rho+2} ds \right)^{\frac{1}{\rho+2}} + C \left(\int_{t_1}^{t_2} \|u'\|_2^2 ds \right)^{1/2} \sup_{t \leq s \leq t+1} \|u(s)\|_2 \end{aligned} \quad (29)$$

a. 当 $1 \leq \rho < 4$, $1 < q < \infty$ ($N = 3$) 且 $\rho < \min\{q-1, (4-N)/2+1\}$ 时,利用嵌入定理,并由(27)式得

$$\|u\|_{\rho+2} \leq C \|u\|_{\frac{2N}{N-2}} \leq C \|\nabla u\|_2 \leq C \sup_{t \leq s \leq t+1} \Psi^{1/2}(s) \quad (30)$$

由(17)~(19),可得到类似于(21)的不等式

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \sigma(u') u' dx ds \leq CD^{\rho+2}(\tau) \quad (31)$$

由(25)(27)和(29)~(31), 并利用 Young 不等式得

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \sigma(u'(s)) u(s) dx ds \leq \alpha \varepsilon \cdot \sup_{t \leq s \leq t+1} \Psi(s) + D^2(\tau) + D^{\rho+2}(\tau) + D^{2\rho+2}(\tau) \quad (32)$$

b. 当 $4(N-2) < \rho < 4[N-4]^+$, $1 < q < (N-2)[N-4]^+(N \geq 4)$ 且 $\rho < \min\{q-1, (4-N)/2+1, 2\}$ 时, 由引理 2,

$$\|u\|_{\rho+2} \leq C \|\Delta u\|_2^{\theta} \cdot \|u\|_{\frac{2N}{N-2}}^{\frac{1-\theta}{2}} \leq C \|\Delta u\|_2^{\theta} \cdot \|\nabla u\|_2^{1-\theta}, \theta = (N-2)/2 - N(\rho+2) \quad (33)$$

为此, 下面估计 $\|\Delta u\|_2$.

对方程(1)两边乘以 $(-2\Delta u')$ 并在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\|\nabla u'\|_2^2/M(\tau) + \|\Delta u\|_2^2] + \mathcal{A}(\nabla \sigma, \nabla u')/M(\tau) = \\ -2M'(\tau)(\nabla u', u) \|\nabla u'\|_2^2/M^2(\tau) + \mathcal{A}(\nabla f, \nabla u')/M(\tau) \end{aligned} \quad (34)$$

由(9),

$$\begin{aligned} 2|(\nabla f, \nabla u')| \leq C \|u\|_{(q-1)N}^{q-1} \|\nabla u\|_{\frac{2N}{N-2}} \|\nabla u'\|_2 \leq \\ C \|u\|_{(q-1)N}^{q-1} (\|\Delta u\|_2^2 + \|\nabla u'\|_2^2) \end{aligned} \quad (35)$$

当 $1 < q < N(N-2)$ 时,

$$2|(\nabla f, \nabla u')| \leq \alpha (\|\Delta u\|_2^2 + \|\nabla u'\|_2^2) \quad (36)$$

由(34)和(36)可得

$$\frac{d}{dt} [\|\nabla u'\|_2^2/M(\tau) + \|\Delta u\|_2^2] + \mathcal{A}(\nabla \sigma, \nabla u')/M(\tau) \leq \alpha (\|\Delta u\|_2^2 + \|\nabla u'\|_2^2) \quad (37)$$

当 $N(N-2) < q < (N-2)(N-4)$ 时, 利用引理 2,

$$\begin{aligned} \|u\|_{(q-1)N}^{q-1} \leq C \|\nabla u\|_2^{(q-1)(1-\gamma)} \cdot \|\Delta u\|_2^{(q-1)\gamma} \leq \\ C \Psi^{(q-1)(1-\gamma)/2} (0) (\|\Delta u\|_2^2 + \|\nabla u'\|_2^2)^{q-1)/2} \end{aligned} \quad (38)$$

其中 $\gamma = \max\{(N-2)/2 - 1, (q-1)\rho\} \leq 1$.

由(35)及(38),

$$2|(\nabla f, \nabla u')| \leq \alpha (\|\Delta u\|_2^2 + \|\nabla u'\|_2^2)^{q-1(N-2)/4+1/2} \quad (39)$$

由(34)和(39)可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\|\nabla u'\|_2^2/M(\tau) + \|\Delta u\|_2^2] + \mathcal{A}(\nabla \sigma, \nabla u')/M(\tau) \leq \\ \alpha (\|\Delta u\|_2^2 + \|\nabla u'\|_2^2) + (\|\Delta u\|_2^2 + \|\nabla u'\|_2^2)^{q-1(N-2)/4+1/2} \end{aligned} \quad (40)$$

从(37)和(40)均可得到

$$\|\Delta u\|_2^2 + \|\nabla u'\|_2^2 \leq C \quad (41)$$

这样由(33)~(41),

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \sigma(u'(s)) \cdot u(s) dx ds \leq \alpha \varepsilon \cdot \sup_{t \leq s \leq t+1} \Psi(s) + D^2(\tau) + D^{\rho+2}(\tau) + D^{2\rho+2}(\tau) \quad (42)$$

因为 $D^{\rho+2}(\tau) \leq \Psi(\tau) \leq \Psi(0)$ 有界, 于是由(24)~(28)及(32)或(42)得

$$\int_{t_1}^{t_2} (\|\nabla u(s)\|_2^2 - \int_{\Omega} f(u(s)) u(s) dx/m_0) ds \leq C\varepsilon \cdot \sup_{t \leq s \leq t+1} \Psi(s) + CD^2(\tau) \quad (43)$$

由(10)和(11),

$$\int_{t_1}^{t_2} \Psi(s) ds \leq C\varepsilon \cdot \sup_{t \leq s \leq t+1} \Psi(s) + CD^2(\tau) \quad (44)$$

由中值定理, 存在 $t^* \in (t, t+1)$, 使得

$$\Psi^*(t) \leq 2C\varepsilon \cdot \sup_{t \leq s \leq t+1} \Psi(s) + 2C \cdot D^2(t) \quad (45)$$

适当选择 ε , 可得到 $\sup_{t \leq s \leq t+1} \Psi(s) \leq CD^2(t)$, 即

$$\Psi^{1+\rho/2}(t) \leq \alpha(\Psi(t) - \Psi(t+1)) \quad (46)$$

由引理 3, 所以存在 $C_0 > 0$, 使得

$$\Psi(t) \leq C_0(1+t)^{-2/\rho} \quad (47)$$

从而 $E(t) \leq C_1(1+t)^{-2/\rho}$ ($C_1 > 0$). 定理 1 证毕.

3 定理 2 的证明

考虑

$$u_{tt} - M(\|u\|_2^2)\Delta u + \delta u_t + |u_t|^\rho u_t = |u|^{q-1}u(x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \quad (48)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega; u(x, t) = 0, x \in \partial\Omega \quad (49)$$

解的能量估计问题. 为证明定理 2, 先证明下面的引理.

引理 4 设 $1 < q < +\infty$ ($N=1, 2$) 或 $1 < q < (N+2)/(N-2)$ ($N \geq 3$), 如果 $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ 并且满足 (16), 则相应的 (48) (49) 的解 $u(t) \in V$ ($0 \leq t < +\infty$).

证明 因为 $K(u_0) > 0$, 则由 $u(t)$ 的连续性知, 在 $t=0$ 的某邻域内有 $K(u(t)) \geq 0$, 设其最大时间为 $t_{\max}$ (可能 $t_{\max} = T$), 注意到

$$\varphi(t) = \|u'\|_2^2/M(t) + (q\|\nabla u\|_2^2 + K(u))(q+1) \geq q\|\nabla u\|_2^2/(q+1) \quad (50)$$

所以

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \frac{q+1}{q}\varphi(t) \leq \frac{q+1}{q}\varphi(0) \quad t \in [0, t_{\max}] \quad (51)$$

并由 (16) 及嵌入定理得, 在 $t \in [0, t_{\max}]$ 时,

$$\begin{aligned} \|u\|_{q+1}^{q+1} &\leq [\alpha(\Omega, q+1)]^{q+1} \|\nabla u\|_2^{q+1} \leq [\alpha(\Omega, q+1)]^{q+1} \|\nabla u\|_2^{q-1} \cdot \|\nabla u\|_2^2 \leq \\ &[\alpha(\Omega, q+1)]^{q+1} (1 + \frac{1}{q})^{q-1/2} (\varphi(0))^{q-1/2} \cdot \|\nabla u\|_2^2 < \frac{m_0}{2} \|\nabla u\|_2^2 \end{aligned} \quad (52)$$

即 $K(u(t)) \geq 0$, $t \in [0, t_{\max}]$, 由此可得 $t_{\max} = T$. 引理 4 证毕.

下面开始证明定理 2. 对方程 (48) 两边乘以 $2u'$, 并在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\|u'\|_2^2/M(t) + \|\nabla u\|_2^2] + 2\delta\|u'\|_2^2 + \|u'\|_{\rho+2}^{\rho+2}/M(t) \leq \\ 2k_0\|u'\|_2^3/M(t) + 2\frac{d}{dt}\|u\|_{q+1}^{q+1}/m(q+1) \end{aligned} \quad (53)$$

类似前面的过程, 存在这样的 $m_1 > 0$, 使得

$$\varphi'(t) + \|u'\|_{\rho+2}^{\rho+2}/M(t) + m_1\|u'\|_2^2/M(t) \leq 0 \quad (54)$$

其中 $\varphi(t)$ 由 (13) 给出. 所以有

$$\varphi(t) + \int_0^t \|u'(s)\|_{\rho+2}^{\rho+2}/M(s) ds + m_1 \int_0^t \|u'(s)\|_2^2/M(s) ds \leq \varphi(0) \quad (55)$$

于是

$$\int_t^{t+1} \|u'(s)\|_2^2 ds + \int_t^{t+1} \|u'(s)\|_{\rho+2}^{\rho+2} ds \leq \alpha(\varphi(t) - \varphi(t+1)) = CD^{\rho+2}(t) \quad (56)$$

从而

$$\int_t^{t+1} \|u'(s)\|_{\rho+2}^{\rho+2} ds \leq CD^{\rho+2}(t) \quad (57)$$

由 Hölder 不等式得

$$\int_t^{t+1} \|u'(s)\|_2^2 ds \leq |\Omega|^{\rho/(\rho+2)} \int_t^{t+1} \|u'(s)\|_{\rho+2}^2 ds \leq CD^2(t) \quad (58)$$

同样地,对方程(48)两边乘以 u ,并在 $\Omega \times (t_1, t_2)$ 上积分可得

$$\int_{t_1}^{t_2} (\|\nabla u\|_2^2 - \|u\|_{\frac{q+1}{q-1}}^{q+1}/m_0(q+1)) ds \leq C\varepsilon \sup_{t \leq s \leq t+1} \Psi(s) + CD^2(t) + \int_{t_1}^{t_2} (|u'|^{\rho+1}, |u|) ds \quad (59)$$

而其中

$$\int_{t_1}^{t_2} (|u'(s)|^{\rho+1}, |u(s)|) ds \leq \int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|_{\rho+2}^2 ds + \int_{t_1}^{t_2} \|u'(s)\|_{\rho+2}^{2\rho+2} ds \quad (60)$$

以及

$$\int_{t_1}^{t_2} (\|u'(s)\|_{\rho+2}^{\rho+1}) ds \leq (\int_{t_1}^{t_2} \|u'(s)\|_{\rho+2}^{\rho+2} ds)^{\frac{\rho+1}{\rho+2}} \cdot (t_2 - t_1)^{\frac{1}{\rho+2}} \leq CD^{\rho+1}(t) \quad (61)$$

于是类似定理1的证明过程可得

$$\int_{t_1}^{t_2} (\|\nabla u\|_2^2 - \|u\|_{\frac{q+1}{q-1}}^{q+1}/m_0(q+1)) ds \leq C\varepsilon \sup_{t \leq s \leq t+1} \varphi(s) + CD^2(t) \quad (62)$$

从而

$$\varphi(t) \leq C_0(1+t)^{-2/\rho} \quad (63)$$

定理2证毕.

参考文献:

- [1] Carrier G F. On the nonlinear vibration problem of the elastic string[J]. Appl Math, 1945(3):157~165.
- [2] 陈才生. 非线性 Carrier 方程的整体解[J]. 南京大学学报(自然科学版), 2001, 18(2):214~221.
- [3] Matsuyama T, Ikehata R. On global solutions and energy decay for the wave equations of Kirchhoff type with nonlinear damping terms[J]. J of Math Anal and Appl, 1996, 204:729~753.
- [4] Kosuke Ono. Global existence and decay properties of solutions for some mildly degenerate nonlinear dissipative Kirchhoff strings[J]. Funkcialaj Ekvacioj, 1997, 40:255~270.
- [5] D'ancona P, Spagnolo S. Nonlinear perturbations of the Kirchhoff equation[J]. Comm Pure Appl Math, 1994, 47:1005~1029.
- [6] Pohozaev S. The Kirchhoff quasilinear hyperbolic equation[J]. Differential Equations, 1985, 21:101~108.
- [7] Frota C L, Cousin A T, Lar'kin N A. Existence of global solutions and energy decay for the Carrier equation with dissipative term[J]. Diff and Integral Eqs, 1999, 12(4):453~469.
- [8] Nakao M. Remarks on the existence and uniqueness of global decaying solutions of the nonlinear dissipative wave equations[J]. Math Zeitschrift, 1991, 206:265~276.
- [9] Nakao M. On the decay of solutions of some nonlinear dissipative wave equations in higher dimension[J]. Math Zeitschrift, 1986, 193:227~234.
- [10] Nakao M. Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with nonlinear dissipative term[J]. J Math Anal Appl, 1977, 58:336~344.

Energy decay of the nonlinear Carrier equation with damping terms

ZHANG Ying-zhou, CHEN Cai-sheng

(College of Science, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: The study proves the energy decay property of the solution to the nonlinear Carrier equation

$$u_{tt} - M(\|u\|_2^2)\Delta u + \sigma(u_t) = f(u) \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$$

where $\sigma'(v) \geq 0$, $0 < m_0 \leq M(s)$, $f(u)$ is continuously differentiable, and there is no assumption of "smallness" conditions imposed on the initial data in a certain sense.

Key words: nonlinear Carrier equation; energy decay estimation; damping term