

弹塑性问题线性互补方程解的存在惟一性

孙林松¹, 王德信², 郭兴文², 施荷芳³

(1. 扬州大学水利与建筑工程学院, 江苏 扬州 225009 2. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098;
3. 南京铁路分局南京建筑段, 江苏 南京 210011)

摘要: 对弹塑性问题线性互补方程解的存在惟一性进行了研究, 证明了对满足相关联流动的理想弹塑性材料, 方程有解; 对满足相关联流动的弹塑性强化材料, 方程有惟一解; 对满足非关联流动的弹塑性强化材料, 当 $-\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}\right)^T \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} > \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \boldsymbol{D} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)$ 时, 方程有惟一解。

关键词: 弹塑性; 线性互补; 存在惟一性

中图分类号: O344.3 文献标识码: A 文章编号: 1000-198X(2002)05-0033-04

目前, 弹塑性问题的求解方法可分为迭代解法和非迭代解法两类. 迭代类解法需要不断重复“试探——求解——调整”的过程, 计算工作量往往较大, 而且算法的收敛性不能完全保证. 非迭代类解法将弹塑性问题转化为二次规划或线性互补问题, 只要问题的解存在, 这类解法总能得到其真解. 文 [1] 直接利用塑性理论中屈服函数与塑性流动参量之间的互补性, 提出了弹塑性的互补变分原理, 并给出了基于有限元离散的线性互补模型. 本文在文 [1] 的基础上对弹塑性问题线性互补方程解的存在惟一性进行研究.

1 弹塑性问题的有限元线性互补模型

弹塑性问题的本构方程包括

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{ij}^p) \quad d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1)$$

$$f\lambda = 0, \lambda \geq 0, f \leq 0 \quad (2)$$

式中: $d\sigma_{ij}$, $d\varepsilon_{ij}^p$ ——应力增量、应变增量和塑性应变增量; D_{ijkl} ——弹性张量; λ , g ——塑性流动因子和势函数; f ——屈服函数, 将其作 Taylor 展开并取一次项, 有

$$f = f_0 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa \quad (3)$$

式中: f_0 ——增量步之前的屈服函数值; $d\kappa = h\lambda$, h 为强化/软化模量, 与内变量 κ 的形式有关, 例如若取塑性功为内变量, 即 $\kappa = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$, 则 $h = \sigma_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$.

对分析区域进行有限元离散后, 可将弹塑性问题转化为求解有限元线性互补方程^[1]

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\lambda} &= d\boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{\lambda} &= 0, \boldsymbol{v} \geq 0, \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\lambda}$ ——松弛向量和塑性流动因子向量; $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{H}$, $d\boldsymbol{q} = -f_0 - \boldsymbol{W}\boldsymbol{K}^{-1}d\boldsymbol{P}$, 两者都只与增量发生之前的应力状态有关. 其中: $\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵, $\boldsymbol{K} = \sum_{e=1}^{NE} (\boldsymbol{C}_u^e)^T \left(\int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} d\Omega \right) \boldsymbol{C}_u^e$; $d\boldsymbol{P}$ 为荷载增量向量, $d\boldsymbol{P} =$

$$\sum_{e=1}^{NE} (\boldsymbol{C}_u^e)^T \left(\int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T d\boldsymbol{b} d\Omega + \int_{S_p^e} \boldsymbol{N}^T d\bar{\boldsymbol{p}} dS \right); f_0 \text{ 为屈服函数初值向量 } f_0 = \sum_{e=1}^{NE_p} (\boldsymbol{C}_\lambda^e)^T \int_{\Omega_e} f_0^e d\Omega; \boldsymbol{H} \text{ 为塑性势矩阵, } \boldsymbol{H} =$$

$\sum_{e=1}^{NE_p} (C_u^e)^T \left(\int_{\Omega_e} B^T D \frac{\partial g}{\partial \sigma} d\Omega \right) C_\lambda^e$; M 为强化矩阵, $M = \sum_{e=1}^{NE_p} (C_\lambda^e)^T \left(\int_{\Omega_e} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} \right)^T \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial g}{\partial \kappa} h \right] d\Omega \right) C_\lambda^e$; W 为约束矩阵, $W = \sum_{e=1}^{NE_p} (C_\lambda^e)^T \cdot \left(\int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T DB d\Omega \right) C_u^e$. C_u^e, C_λ^e 分别为自由度向量和塑性流动因子向量的单元选择矩阵.

为便于讨论,可将强化矩阵 M 改写为

$$M = M_1 + M_2 \quad (5)$$

$$\text{式中: } M_1 = \sum_{e=1}^{NE_p} (C_\lambda^e)^T \left(\int_{\Omega_e} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right] d\Omega \right) C_\lambda^e; M_2 = \sum_{e=1}^{NE_p} (C_\lambda^e)^T \left(\int_{\Omega_e} \left[- \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} \right)^T \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} h \right] d\Omega \right) C_\lambda^e.$$

2 解的存在惟一性

线性互补方程式(4)的解的存在惟一性取决于矩阵 Φ 的特性,这里首先引入下列引理.

引理1 设方阵 $A = \begin{bmatrix} K & H \\ W & M \end{bmatrix}$, K 为对称可逆矩阵, $\Phi = M - WK^{-1}H$ 则

1° 若 A 是对称(半)正定矩阵,则 Φ 也是对称(半)正定的;

2° 若 A 是 P -矩阵,则 Φ 也是 P -矩阵.

证 1° 若 A 是对称(半)正定矩阵,则 $W = H^T$, M 为对称矩阵,又由于 K 是对称可逆矩阵,所以 Φ 是对

称矩阵. 设非奇异矩阵 $P = \begin{bmatrix} I & -K^{-1}W^T \\ 0 & I \end{bmatrix}$ 对矩阵 A 作合同变换有

$$P^T A P = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & M - WK^{-1}H \end{bmatrix} \quad (6)$$

由于合同变换不改变矩阵的正定性^[2],所以若 A 是对称(半)正定矩阵,则 $P^T A P$ 是对称(半)正定矩阵,因而 $\Phi = M - WK^{-1}H$ 也是对称(半)正定矩阵.

2° 若 A 为 P -矩阵,对任意的向量 $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \neq 0$, 令 $A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ 则存在正对角阵 $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$ 使得^[3]

$$T = X^T Q A X = X_1^T Q_1 Y_1 + X_2^T Q_2 Y_2 > 0 \quad (7)$$

根据矩阵 A 的定义,有

$$KX_1 + HX_2 = Y_1 \quad (8)$$

$$WX_1 + MX_2 = Y_2 \quad (9)$$

由式(8)可解得

$$X_1 = K^{-1}Y_1 - K^{-1}HX_2 \quad (10)$$

将式(10)代入式(9),得

$$Y_2 = MX_2 + WK^{-1}Y_1 - WK^{-1}HX_2 \quad (11)$$

将式(10)(11)代入式(7)并利用条件 $K = K^T$, 有

$$T = Y_1^T K^{-1} Q_1 Y_1 + X_2^T Q_2 (M - WK^{-1}H) X_2 + X_2^T Q_2 WK^{-1} - H^T K^{-1} Q_1 Y_1 \quad (12)$$

对于任意的 $X_2 \neq 0$ 从式(8)知,总可以选择适当的 X_1 使得 $Y_1 = 0$ 从而有

$$T = X_2^T Q_2 (M - WK^{-1}H) X_2 = X_2^T Q_2 \Phi X_2 > 0 \quad (13)$$

而 Q_2 是正对角阵,所以 Φ 是 P -矩阵^[3].

利用引理1,可以通过考察矩阵 A 来确定矩阵 Φ 的性质.这样可以得到如下关于弹塑性问题线性互补方程式(4)的几个定理.

定理 1 对满足相关联流动法则的理想弹塑性材料,线性互补方程式(4)有解,对满足相关联流动法则的弹塑性强化材料,线性互补方程式(4)有惟一解

证 材料满足相关联流动法则时,塑性势面与屈服面一致,即 $g = f$. 对任意 $X = \begin{pmatrix} du \\ \lambda \end{pmatrix} \neq 0$,有

$$\begin{aligned} T &= X^T A X = \begin{pmatrix} du \\ \lambda \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} K & H \\ W & M_1 + M_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} du \\ \lambda \end{pmatrix} = \\ &= du^T K du + \lambda^T M_1 \lambda + du^T H \lambda + \lambda^T W du + \lambda^T M_2 \lambda = \\ &= \sum_{e=1}^{NE_p} \int_{\Omega_e} \left\{ \left[B du^e + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \lambda^e \right]^T D \left[B du^e + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \lambda^e \right] - \lambda^e \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} \right)^T \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \right] \lambda^e \right\} d\Omega \quad (14) \end{aligned}$$

可见,如果用张量表示,则只要满足

$$\left[du_{ij} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right] D_{ijkl} \left[du_{kl} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right] - \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} h \right) \lambda^2 \geq 0 \quad (15)$$

就可以保证矩阵 A 的(半)正定性.

由弹性张量 D_{ijkl} 的正定性可知

$$\left[du_{ij} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right] D_{ijkl} \left[du_{kl} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right] \geq 0 \quad (16)$$

因而,问题的关键在于证明

$$m_2 = \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} h \leq 0 \quad (17)$$

事实上,对理想弹塑性体显然有 $m_2 = 0$,故 A 是半正定矩阵,由引理 1 知矩阵 Φ 是半正定的,所以线性互补方程式(4)有解.

对于强化材料,在塑性加载过程中应满足一致性条件

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (18)$$

根据塑性力学中的 Drucker 公设可知上式中第一项大于零,将式(1)以及 $d\kappa = h\lambda$ 代入得 $m_2 < 0$. 所以 A 是正定矩阵,因而矩阵 Φ 也是正定的,线性互补方程式(4)有惟一解.

定理 2 对满足非关联流动法则的弹塑性硬化材料,若满足不等式

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} \right)^T \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} h > \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)^T D \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \quad (19)$$

则线性互补方程式(4)有惟一解.

证 对任意 $X = \begin{pmatrix} du \\ \lambda \end{pmatrix} \neq 0$,有

$$\begin{aligned} T &= X^T (A + A^T) X = \begin{pmatrix} du \\ \lambda \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 2K & H + W^T \\ W + H^T & 2M_1 + 2M_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} du \\ \lambda \end{pmatrix} = \\ &= 2 \sum_{e=1}^{NE_p} \int_{\Omega_e} \left\{ \left[B du^e + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \lambda^e \right]^T D \left[B du^e + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \lambda^e \right] \right\} d\Omega + \\ &= 2 \sum_{e=1}^{NE_p} \int_{\Omega_e} \left\{ \lambda^e \left[- \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} \right)^T \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} h - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)^T D \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \right] \lambda^e \right\} d\Omega \quad (20) \end{aligned}$$

考虑到矩阵 D 的正定性,并利用条件式(19)可得

$$T = X^T (A + A^T) X > 0 \quad (21)$$

所以 $A + A^T$ 是对称正定矩阵,则 A 是 P -矩阵^[3]. 根据引理 1 可知 Φ 也是 P -矩阵,所以线性互补方程式(4)有惟一解^[4].

对于工程中常见的采用 Drucker-Prager 屈服准则,塑性势面为 Mises 面的情形,可以得到如下推论.

推论 1 设 $f(\sigma) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - \kappa_1$ 且 $g(\sigma) = \sqrt{J_2} - \kappa_2$ 则当 $h > \frac{3}{4} \frac{E}{1-2\mu} \alpha^2$ 时, 弹塑性问题线性互补方程式 (4) 有惟一解.

推论 1 的证明只需对给定的屈服函数与塑性势函数分别计算 $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ 和 $\frac{\partial g}{\partial \sigma}$ 后代入式 (19) 即可.

3 结 语

本文分别对关联流动和非关联流动情况下弹塑性问题线性互补方程解的存在惟一性进行了研究, 证明了在满足关联流动法则时, 理想弹塑性材料的线性互补方程有解, 弹塑性硬化材料的线性互补方程有惟一解; 对满足非关联流动的弹塑性硬化材料, 当式 (19) 成立时线性互补方程有惟一解, 需要指出的是, 这只是一个充分而非必要条件, 更严格的条件还有待作进一步的研究.

参考文献:

- [1] 孙林松, 王德信, 郭兴文. 弹塑性问题的互补变分原理与模型[J]. 河海大学学报(自然科学版) 2002, 30(2): 35~38.
- [2] 张明淳. 工程矩阵理论[M]. 南京: 东南大学出版社, 1995. 121~122.
- [3] 陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990. 309~311.
- [4] Cottle R W, Pang J S, Stone R E. The linear complementarity problem[M]. Boston: Academic Press, 1992. 146~151.

Existence and uniqueness of solutions to linear complementarity equations of elasto-plastic problems

SUN Lin-song¹, WANG De-xin², GUO Xing-wen², SHI He-fang³

(1. College of Hydraulic and Civil Engineering, Yangzhou Univ., Yangzhou 225009, China;

2. College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China;

3. Department of Architecture, Nanjing Railway Branch, Nanjing 210011, China)

Abstract: A study is performed on the existence and uniqueness of solutions to the linear complementarity equations (LCEs) of elasto-plastic problems. To elasto-plastic problems considering associated flow, LCEs have solutions for ideal elasto-plastic materials and unique solutions for reinforcing materials. For reinforcing elasto-plastic materials with non-associated flow, if $-\left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon^p}\right)^T \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} > \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)^T D \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)$ holds, LCEs have unique solutions.

Key words: elasto-plasticity; linear complementarity; existence and uniqueness