

一个考虑土体流变的修正剑桥粘弹塑性模型

陈远洪¹, 洪宝宁², 龚道勇³, 刘萌成²

(1. 铁道第四勘察设计院, 湖北 武汉 430063; 2. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098;
3. 长江水利委员会长江勘测规划设计研究院, 湖北 武汉 430010)

摘要 在修正剑桥模型的基础上, 考虑土的流变性, 提出一种可较全面地反映土体变形的各种粘弹塑性特征的修正剑桥粘弹塑性模型. 进而运用该模型对室内三轴固结排水剪流变试验进行三维有限元模拟, 并与其他模型的对比分析, 初步证明了本构模型的合理性和有效性.

关键词 粘弹塑性 本构模型 流变 三维有限元 数值分析

中图分类号 :TU435 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2002)05-0044-04

土体应力-应变关系是土工计算中的关键问题. 工程土体变形性质非常复杂, 已经提出的许多土体的本构模型各有优缺点. 著名的修正剑桥模型^[1]能较好地反映土体的弹塑性, 但不能考虑其流变特性. 修正的 Koumanura-Huang 模型考虑了粘弹塑性, 能较好地反映土的流变性, 但塑性的考虑过于简单, 仅适用于理想塑性材料. 沿海软土往往具有显著的流变特性, 随着沿海地区经济的快速发展, 对土体变形和强度的要求越来越高, 因此, 研究如实地反映土体粘弹塑性的本构模型具有重要的现实意义. 本文在前人工作的基础上, 将修正剑桥模型与修正的 Koumanura-Huang 模型结合起来, 充分发挥两种模型的优点, 提出一种新的土体粘弹塑性模型(以后简称新建模型). 该模型可较全面地反映土体变形的各种粘、弹、塑性特征.

1 模型建立

1.1 模型的推导

修正的考马拉-黄模型如图 1 所示, 它由虎克弹簧、开尔文体、宾哈姆体串联而成.

该模型中, 应变由 3 部分组成, 写成增量形式为

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^{ve} + d\epsilon_{ij}^{vp} \quad (1)$$

式中: ϵ_{ij}^e ——瞬时弹性应变; ϵ_{ij}^{ve} ——粘弹性应变, ϵ_{ij}^{vp} ——粘塑性应变.

瞬时弹性应变 ϵ_{ij}^e 由图 1 中弹簧 E_0 产生, 复杂应力状态下有

$$d\epsilon_{ij}^e = [(1 + \nu)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})/2 - \nu\delta_{ij}\delta_{kl}]/E_0 d\sigma_{kl}' \quad (2)$$

粘弹性应变 ϵ_{ij}^{ve} 由图 1 中开尔文体产生, 复杂应力状态下, 其应变速率为

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{ve} = \eta_e \{ [(1 + \nu)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})/2 - \nu\delta_{ij}\delta_{kl}]/E_2 \sigma_{kl}' - \epsilon_{ij}^{ve} \} \quad (3)$$

式中 $\eta_e = E_1/K_1$.

粘塑性应变 ϵ_{ij}^{vp} 由图 1 中宾哈姆体产生, 在复杂应力状态下, 其应变速率^[2,3]①为

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \eta_p \left\langle \frac{F - F_0}{F_0} \right\rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}'} \quad (4)$$

式中: $\langle \cdot \rangle$ ——开关函数, 即 $\langle f \rangle = \begin{cases} 0 & (f \leq 0) \\ f & (f > 0) \end{cases}$; $F = p + \frac{q^2}{M^2(p + p_r)}$ (修正剑桥模型的屈服函数); $F_0 =$

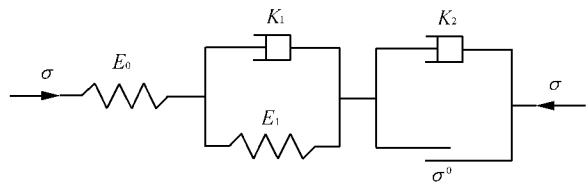


图 1 修正的考马拉-黄模型

Fig.1 Modified Kormanura-Huang model

$p_0 \exp\left(\frac{1+e_0}{\lambda-k} \epsilon_v^p\right)$ (修正剑桥模型的硬化规律); η_p —— 试验常数.

为了应用到有限元中,上述本构关系须以增量形式表示,推导如下.

考察 $t = t_0$ 到 $t = t_0 + \Delta t$ 时间区间,则由式(3)表示的应变率法则,用隐式的时间步进方案,可由下式确定在时间间隔 Δt 内所产生的应变增量^[4]:

$$d\epsilon_{ij}^{ve} = \Delta t \left[(1 - \theta) \dot{\epsilon}_{ij}^{ve} \Big|_{t=t_0} + \theta \dot{\epsilon}_{ij}^{ve} \Big|_{t=t_0+\Delta t} \right] \quad (5)$$

式中: $\dot{\epsilon}_{ij}^{ve}$ —— 时刻 t_0 的应变率; $\dot{\epsilon}_{ij}^{ve} \Big|_{t=t_0+\Delta t}$ —— 时刻 $t_0 + \Delta t$ 内应变率. 当 $\theta = 0$ 时,我们得到了 Euler 时间积分法,即“全显式法”;当 $\theta = 1$ 时,则给出了“全隐式法”,应变增量由与时间间隔终点相对应的应变率确定;当 $\theta = 0.5$ 时,可得“隐式梯形法”.利用 Taylor 级数展开式并取线性项,化简式(5)得

$$d\epsilon_{ij}^{ve} = \Delta t (\dot{\epsilon}_{ij}^{ve} + \theta d\dot{\epsilon}_{ij}^{ve}) \quad (6)$$

式(3)代入式(6),解得

$$d\epsilon_{ij}^{ve} = \frac{\Delta t}{1 + \theta \eta_e \Delta t} \left\{ \dot{\epsilon}_{ij}^{ve} + \frac{\theta \eta_e}{E_1} \left[(1 + \nu) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) / 2 - \nu \delta_{ij} \delta_{kl} \right] d\sigma_{kl}' \right\} \quad (7)$$

同理,可得

$$d\epsilon_{ij}^{vp} = \Delta t \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} + \theta \eta_p \Delta t \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}'} \left(\left\langle \frac{F - F_0}{F_0} \right\rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}'} \right) d\sigma_{kl}' \quad (8)$$

综合上述,得

$$d\epsilon_{ij} = C_{ijkl} d\sigma_{kl}' + \frac{\Delta t}{1 + \theta \eta_e \Delta t} \dot{\epsilon}_{ij}^{ve} + \Delta t \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \quad (9)$$

$$C_{ijkl} = \left(\frac{1}{E_0} + \frac{\Delta t \theta \eta_e}{1 + \Delta t \theta \eta_e} \frac{1}{E_2} \right) \left[(1 + \nu) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) / 2 - \nu \delta_{ij} \delta_{kl} \right] + \theta \Delta t h_{ijkl}$$

$$h_{ijkl} = \eta_p \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}'} \left(\left\langle \frac{F - F_0}{F_0} \right\rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}'} \right)$$

1.2 模型参数的确定

上述修正的剑桥粘弹塑性模型包含 10 个参数. 除弹性泊松比因弹性变形比例较小而近似取 0.3 外,其余 9 个参数需经应变和应力式三轴试验测定.

1.2.1 E_0, E_1, η_e 的确定

应力水平较低(如小于 10%)时,认为只发生粘弹性变形^[5]. 进行室内应力控制式三轴排水剪流变试验,可以测得麦钦特体的柔度函数曲线,函数关系如式(10)所示. 通过三轴排水剪流变试验曲线,由麦钦特体可方便地求出 3 个参数,如取较多的点,可以 3 点为一组,然后取平均值.

$$\delta(t) = \frac{\Delta \epsilon_a}{\Delta \sigma_1} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_0} [1 - \exp(-\eta_e t)] \quad (10)$$

归一化处理: $\frac{1}{E_0}, \frac{1}{E_1}$ 均与加载时的球应力 $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$ 有关,一般可表示成

$$E_0 = E_0^* p_a (p/p_a)^{n_0} \quad (11)$$

$$E_1 = E_1^* p_a (p/p_a)^{n_1} \quad (12)$$

而 η_e 与 p 关系不大,因此对不同围压下(即不同球应力下)的 E_0, E_1 , 点绘不同 σ_3 下的 $\lg E_0 \sim \lg(p/p_a)$ 和 $\lg E_1 \sim \lg(p/p_a)$ 关系曲线,它们近似为一直线,如图 2 和图 3 所示.

由图 2 得斜率为 n_0 ,由其截距 $\lg(E_0^* p_a)$ 可定出 E_0^* . 由图 3 得 n_1 和 E_1^* . E_0 和 E_1 按式(11)和式(12)计算. η_e 受 p 影响较小,可取不同围压下的平均值作为计算用参数且不变. K_1 可由 $K_1 = E_1/\eta_e$ 求得.

1.2.2 $M, p_r, e_0, \lambda, \kappa$ 的确定

$M, p_r, e_0, \lambda, \kappa$ 由剑桥模型方法确定^[6].

1.2.3 η_p 的确定

应力水平为 10% 时,认为只发生粘弹性变形,由应力式三轴排水剪流变试验测得的 $\epsilon_v \sim t$ 曲线的尾部取

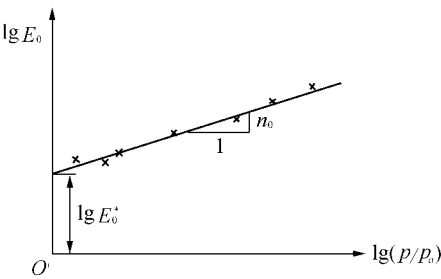


图 2 $\lg(p/p_a) \sim \lg E_0$ 关系曲线
Fig.2 $\lg(p/p_a)$ vs. $\lg E_0$

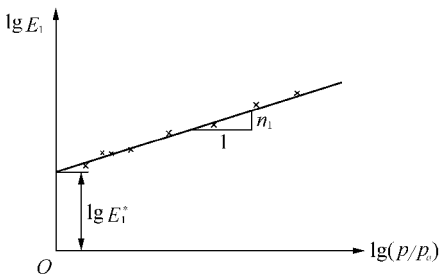


图 3 $\lg(p/p_a) \sim \lg E_1$ 关系曲线
Fig.3 $\lg(p/p_a)$ vs. $\lg E_1$

一点定出 $\dot{\epsilon}_v^{ve} |_{s=10\%}$ 此时的 $\epsilon_v^{ve} |_{s=10\%}$ 可由应变式三轴排水剪试验确定. 应力水平为 50% 时, 粘弹性应变很小, 近似有 $\dot{\epsilon}_{v50} = \dot{\epsilon}_v^{vp} + \dot{\epsilon}_v^{ve} |_{s=10\%}$, 即 $\dot{\epsilon}_v^{vp} = \dot{\epsilon}_{v50} - \dot{\epsilon}_v^{ve} |_{s=10\%}$, 由应力式三轴排水剪流变试验测得的 $\epsilon_v \sim t$ 曲线(图 4)的尾部取一点定出 $\dot{\epsilon}_{v50}$ 此时的 ϵ_{v50} 也可由应变式三轴排水剪试验确定, 则 $\epsilon_v^{vp} = \epsilon_{v50} - \epsilon_v^{ve} |_{s=10\%}$. 故有

$$\eta_p = \frac{\dot{\epsilon}_v^{vp}}{\langle \frac{F - F_0}{F_0} \rangle \left(1 - \frac{q^2}{M^2(p + p_r)^2} \right)} = \frac{\dot{\epsilon}_0^{vp} \exp\left(\frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \epsilon_v^{vp}\right)}{\left(1 - \frac{q^2}{M^2(p + p_r)^2} \right) \left[p + \frac{q^2}{M^2(p + p_r)} - p_0 \exp\left(\frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \epsilon_v^{vp}\right) \right]} \quad (13)$$

2 模型验证

为了验证新建模型的合理性, 笔者利用所提出的本构模型, 根据 Biot 固结方程, 编制了三维固结流变有限元程序(限于篇幅, Biot 固结有限元推导过程本文从略). 首先进行了室内试验模拟, 对三轴固结排水剪流变试验进行数值分析. 土样取自广东珠江三角洲地区的软粘土, 选取一组典型试验进行分析. 模拟分两部分: 一是固结过程模拟; 二是排水剪切过程模拟. 根据试验具体条件, 在未剪切之前, 加上各向等压, 作为第一级荷载, 并以此作为试样的初始应力, 排水剪切过程是从固结后的试样开始的. 单元网格划分以此为依据, 网格剖分如图 5 所示, 本文采用 8 结点 6 面体等参单元模拟试样.

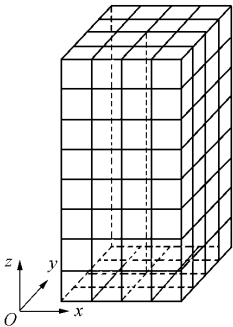


图 5 试样网格剖分
Fig.5 Mesh dissection of the sample

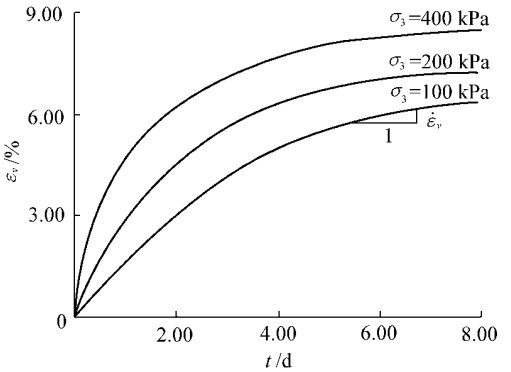


图 4 $s = 50\%$ 时的流变曲线
Fig.4 Rheologic curves for $s = 50\%$

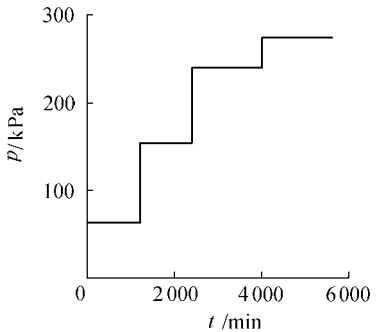


图 6 试样加载量随时间变化曲线
Fig.6 Loading vs. time for the sample

根据试样情况加了 4 级竖向荷载(如图 6). 试验到第 5 级土体破坏, 所以只进行了前 4 级试验模拟. 图 7 给出了按各种计算模型模拟的结果, 除了模型不同外, 其他条件完全一致. 由图 7 可以看出, 修正剑桥模型模拟结果最小. 其次是邓肯-张模型, 考虑时间效应(流变)后的新建模型模拟效果最好.

修正剑桥模型虽然考虑了塑性变形, 但不能反映流变效应, 导致模拟结果明显偏小. 邓肯-张模型由于仅考虑土体的非线性, 并以此代替土体变形的粘塑性特征, 不能反映土体变形的实质, 所以模拟结果也比较小;

新建模型由于正确反映了土体的应力-应变-时间关系,故与试验结果吻合得较好.

3 结 语

在修正剑桥模型的基础上,考虑土的流变性,本文提出了一种新的修正剑桥粘弹塑性本构模型,它可较全面地反映土体变形的各种粘弹塑性特征.通过理论分析和推导,得到了新建模型的本构关系.模型参数确定也不复杂,通过普通的应变和应力式三轴试验即可测定.通过室内模拟试验初步证明了模型的合理性和有效性.对于流变性显著的土体,特别是沿海的软粘土,采用新建模型可以得到较好的结果.模型的可靠性需要多方面的验证,笔者将继续这一工作.本构模型在其他试验和工程中的应用仍在进一步研究之中.

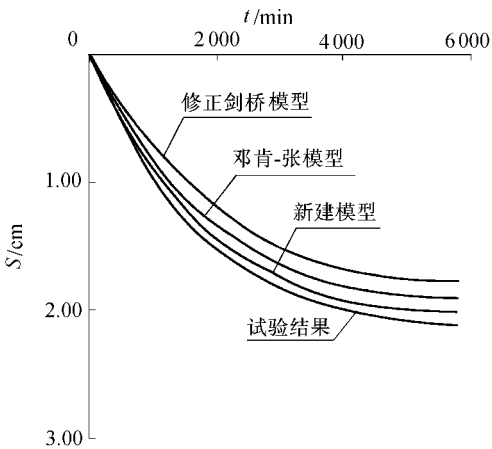


图 7 试样压缩量随时间变化
Fig.7 Settlement vs. time for the sample

参考文献：

[1] Roscoe K H, Burland J B. On the generalized stress-strain behavior of “ wet clay ” in engineering plasticity [M]. Cambridge :Cambridge Univ Press, 1968. 535 ~ 609.

[2] 孙钧,汪炳鉴. 地下结构有限元解析 [M]. 上海 :同济大学出版社,1986. 167 ~ 173.

[3] Zienkiewicz O C, Corneau I C. Visco-plasticity and creep in elastic solids—a unified numerical solution approach [J]. Int J for Num Methods in Eng, 1974(8) :821 ~ 845.

[4] 雷晓燕. 岩土工程数值计算 [M]. 北京 :中国铁道出版社, 1999. 21 ~ 30.

[5] 詹美礼,钱家欢,陈绪禄. 软土流变特性试验及流变模型 [J]. 岩土工程学报,1993,15(3) 54 ~ 62.

[6] 黄文熙. 土的工程性质 [M]. 北京 :水利电力出版社, 1981. 33 ~ 40.

Modified Cambridge visco-elastic-plasticity model considering rheology of soil

CHEN Yuan-hong¹, HONG Bao-ning², GONG Dao-yong³, LIU Meng-cheng²
(1. The Fourth Railway Survey & Design Institute, Wuhan 430063, China ;
2. College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China ;
3. Changjiang Water Resources Commission, Wuhan 430010, China)

Abstract : On the basis of the modified Cambridge model, and with the rheology of soil considered, a new modified Cambridge visco-elastic-plasticity model is presented, which can comprehensively reflect the visco-elastic-plasticity of soil deformation. Then the model is applied to the finite element simulation of 3-D consolidation of a sample in laboratory triaxial drained shear-creep tests. As compared with other models, the present constitutive model is proved to be reasonable and effective.

Key words : visco-elastic-plasticity ; constitutive model ; rheology ; 3-D FEM ; numerical analysis