

五跨刚架弯矩分配传递无限次的闭合解

徐汉忠¹ , 谢桂华² , 张 倩³

(1. 河海大学土木工程学院 , 江苏 南京 210098 ; 2. 苏州市交通工程质量监督站 , 江苏 苏州 215003 ;
3. 中建东南设计研究院 , 江苏 南京 210024)

摘要 : 对分层后五跨刚架用弯矩分配法对结点的不平衡力矩进行无数次分配传递 , 求得无数次分配弯矩和传递弯矩之和 , 得闭合解。
关键词 : 多高层建筑 ; 框架 ; 刚架 ; 闭合解
中图分类号 : TB121 ; TU311.1 文献标识码 : A 文章编号 : 1000-198X(2002)05-0071-04

多高层建筑框架在竖向荷载作用下的内力分析计算采用分层法后 , 得到如图 1 所示的刚架 , 这里不考试侧移影响。

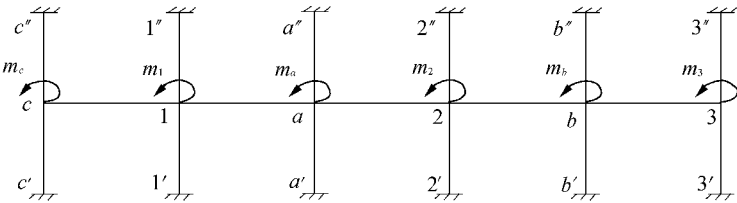


图 1 五跨刚架
Fig. 1 Rigid frame with five spans

刚架用弯矩分配法求解时 , 将各结点用假设的刚臂固定 , 求得任意竖向荷载引起的固端弯矩 , 然后求得结点不平衡力矩 , 从而将求任意竖向荷载作用的问题转化为求任意的结点不平衡力矩作用的问题。因此图 1 仅绘出任意的结点不平衡力矩。

本文在文献 1 ~ 6 的基础上 , 对图 1 所示的五跨刚架结点不平衡力矩进行无限次分配传递 , 求得了无穷多次分配弯矩和传递弯矩之和。该和为欲求的精确解或闭合解 , 表达式十分简单 , 便于应用。

1 图 1 $m_a \neq 0, m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_b = m_c = 0$ 的解

图 2 为对图 1 结点 a 的不平衡力矩 m_a 用三结点同时放松的弯矩分配法^[3, 4]列表计算的一个循环。其中弯矩分配系数用 D 加 2 个下标表示 , 传递系数用 C 加 2 个下标表示。

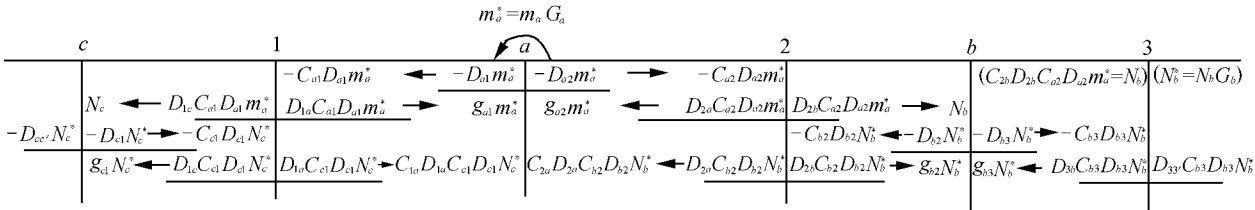


图 2 m_a 作用的第一个循环
Fig. 2 First cycle under the action of m_a

图 2 中 ,

$$\left. \begin{aligned} g_{1a} &= g_{a1} = C_{1a}C_{a1}D_{1a}D_{a1} & g_{2a} &= g_{a2} = C_{a2}C_{2a}D_{2a}D_{a2} \\ g_{2b} &= g_{b2} = C_{2b}C_{b2}D_{2b}D_{b2} & g_{3b} &= g_{b3} = C_{3b}C_{b3}D_{3b}D_{b3} \\ g_{c1} &= g_{1c} = C_{c1}C_{1c}D_{c1}D_{1c} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} G_a &= 1/[1 - (g_{a1} + g_{a2})] \\ G_b &= 1/[1 - (g_{b2} + g_{b3})] \\ G_c &= 1/(1 - g_{c1}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

可见 g_{1a} 为杆件 1a 两端的分配系数 D_{1a} 、 D_{a1} 和双向传递系数 C_{1a} 、 C_{a1} 的乘积, 故 g_{1a} 为杆件 1a 的性质系数, 余同. G_a 、 G_b 、 G_c 分别为结点 a、b、c 的性质系数^[2,3].

图 2 中一个循环分两个步骤: 第一步, 用刚臂固定结点 bc 和 3, 同时放松结点 1a2, 对结点 a 的等效不平衡力矩 $m_a^* = m_a G_a$ 进行分配传递, 在 b 结点产生不平衡力矩 N_b , 在 c 结点产生不平衡力矩 N_c :

$$\left. \begin{aligned} N_b &= C_{2b}D_{2b}C_{a2}D_{a2}^* m_a \\ N_c &= C_{1c}D_{1c}C_{a1}D_{a1}^* m_a \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

第二步, 首先用刚臂固定结点 a1c, 同时放松结点 2b3, 对结点 b 的等效不平衡力矩

$$N_b^* = N_b G_b$$

进行分配传递, 在 a 结点产生不平衡力矩 $C_{2a}D_{2a}C_{b2}D_{b2} G_b N_b$. 其次用刚臂固定结点 a2b 和 3, 同时放松结点 c1, 对结点 c 的等效不平衡力矩

$$N_c^* = N_c G_c$$

进行分配传递, 在 a 结点产生不平衡力矩 $C_{1a}D_{1a}C_{c1}D_{c1} G_c N_c$. 在 a 结点产生总不平衡力矩 m_a^2 ,

$$m_a^2 = C_{1a}D_{1a}C_{c1}D_{c1} G_c N_c + C_{2a}D_{2a}C_{b2}D_{b2} G_b N_b \quad (4)$$

将式(3)代入式(4)得

$$m_a^2 = C_{1a}D_{1a}C_{c1}D_{c1} G_c C_{1c}D_{1c}C_{a1}D_{a1}^* m_a^* + C_{2a}D_{2a}C_{b2}D_{b2} G_b C_{2b}D_{2b}C_{a2}D_{a2}^* m_a^* = (G_c g_{a1} g_{c1} + G_b g_{a2} g_{b2}) m_a^* \quad (5)$$

在 a 结点产生等效不平衡力矩 m_a^{*2} ,

$$m_a^{*2} = m_a^2 G_a = G_a (G_c g_{a1} g_{c1} + G_b g_{a2} g_{b2}) m_a^* \quad (6)$$

同上循环无穷多次, 在 a 点形成的等效不平衡力矩之和用 H_a^* 表示, 显然

$$H_a^* = m_a^* + m_a^{*2} + m_a^{*3} + m_a^{*4} + \dots \quad (7)$$

由式(6)可知上式右边为公比 $G_a (G_c g_{a1} g_{c1} + G_b g_{a2} g_{b2})$ 小于 1 的无穷等比级数的和, 故

$$H_a^* = m_a^* G_{abc} = m_a G_a G_{abc} \quad (8)$$

其中

$$G_{abc} = 1/[1 - (G_a G_c g_{a1} g_{c1} + G_a G_b g_{a2} g_{b2})] \quad (9)$$

将图 2 的等效不平衡力矩由 m_a^* 改为 H_a^* 后变成图 3, 叠加图 3 分配力矩和传递力矩就得到图 1 问题的在原 m_a 作用下各杆端弯矩的闭合解, 用式(10)表示.

$$H_a^* = m_a G_{abc} = m_a G_a G_{abc}$$

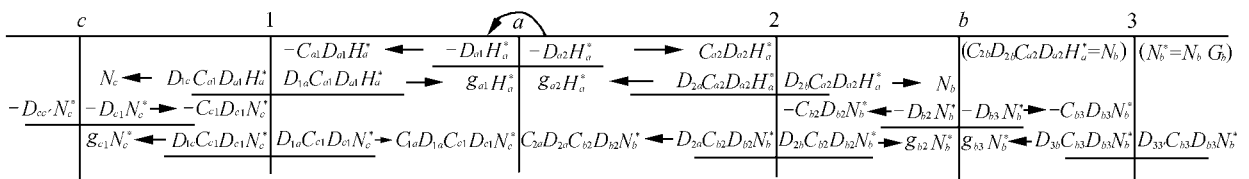


图 3 m_a 作用的闭合解

Fig. 3 Closed solution under the action m_a

$$\left. \begin{aligned} M_{cc'} &= -D_{cc'}H_c^* & M_{cc''} &= -D_{cc''}H_c^* & M_{c1} &= (-D_{c1} + g_{c1})H_c^* + C_{1c}D_{1c}C_{a1}D_{a1}H_a^* \\ M_{1c} &= (D_{1c} - 1)C_{c1}D_{c1}H_c^* + D_{1c}C_{a1}D_{a1}H_a^* & M_{11'} &= D_{11'}C_{c1}D_{c1}H_c^* + D_{11'}C_{a1}D_{a1}H_a^* \\ M_{11''} &= D_{11''}C_{c1}D_{c1}H_c^* + D_{11''}C_{a1}D_{a1}H_a^* & M_{1a} &= D_{1a}C_{c1}D_{c1}H_c^* + (D_{1a} - 1)C_{a1}D_{a1}H_a^* \\ M_{a1} &= C_{1a}D_{1a}C_{c1}D_{c1}H_c^* + (-D_{a1} + g_{a1})H_a^* & M_{aa'} &= -D_{aa'}H_a^* & M_{aa''} &= -D_{aa''}H_a^* \\ M_{a2} &= (-D_{a2} + g_{a2})H_a^* + C_{2a}D_{2a}C_{b2}D_{b2}H_b^* & M_{2a} &= (D_{2a} - 1)C_{a2}D_{a2}H_a^* + D_{2a}C_{b2}D_{b2}H_b^* \\ M_{22'} &= D_{22'} + C_{a2}D_{a2}H_a^* + D_{22'}C_{b2}D_{b2}H_b^* & M_{22''} &= D_{22''}C_{a2}D_{a2}H_a^* + D_{22''}C_{b2}D_{b2}H_b^* \\ M_{2b} &= D_{2b}C_{a2}D_{a2}H_a^* + (D_{2b} - 1)C_{b2}D_{b2}H_b^* & M_{b2} &= C_{2b}D_{2b}C_{a2}D_{a2}H_a^* + (-D_{b2} + g_{b2})H_b^* \\ M_{bb'} &= -D_{bb'}H_b^* & M_{bb''} &= -D_{bb''}H_b^* & M_{b3} &= (-D_{b3} + g_{b3})H_b^* \\ M_{3b} &= (D_{3b} - 1)C_{b3}D_{b3}H_b^* & M_{33'} &= D_{33'}C_{b3}D_{b3}H_b^* & M_{33''} &= D_{33''}C_{b3}D_{b3}H_b^* \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} H_c^* &= N_c^* = N_c G_c = G_c C_{1c} D_{1c} C_{a1} D_{a1} H_a^* \\ H_b^* &= N_b^* = N_b G_b = G_b C_{2b} D_{2b} C_{a2} D_{a2} H_a^* \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

作为算例,设图 1 中仅 $m_a = 100$.

分配系数 $D_{c1} = D_{3b} = 1/3$ $D_{c4} = D_{c1} = D_{1c} = D_{1a} = D_{a1} = D_{a2} = D_{2a} = D_{2b} = D_{b2} = D_{b3} = 0.25$
传递系数均为 0.5.

杆件性质系数 $g_{c1} = g_{b3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{48}$ $g_{a1} = g_{a2} = g_{b3} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$

$$G_b = 1[1 - (g_{b2} + g_{b3})] = 192/185 = 1.037\,837\,8$$

结点性质系数 $G_c = 1[1 - g_{c1}] = 48/47 = 1.021\,277$

$$G_a = 1[1 - (g_{a1} + g_{a2})] = 32/31 = 1.032\,258$$

结点性质相关系数 $G_{abc} = 1[1 - G_a G_b g_{a2} g_{b2} - G_a G_c g_{a1} g_{c1}] = 1.000\,6$

等效不平衡力矩之知 $H_a^* = m_a^* G_{abc} = m_a G_a G_{abc} = 100 \times 1.032\,258 \times 1.000\,6 = 103.288$

$$H_c^* = G_c C_{1c} D_{1c} C_{a1} D_{a1} H_a^* = 1.021\,277 \times 0.5 \times 0.25 \times 0.5 \times 0.25 \times 103.288 = 1.648\,2$$

$$H_b^* = G_b C_{2b} D_{2b} C_{a2} D_{a2} H_a^* = 1.037\,837\,8 \times 0.5 \times 0.25 \times 0.5 \times 0.25 \times 103.288 = 1.674\,9$$

由式(10)可求得各杆端弯矩,其中和结点 a 相连的各杆端弯矩为

$$M_{a1} = (0.5 \times 0.25 \times 0.5/3) \times 1.648\,2 + (-0.25 + 1/64) \times 103.288 = -24.174$$

$$M_{a2} = (0.5 \times 0.25 \times 0.5 \times 0.25) \times 1.674\,9 + (-0.25 + 1/64) \times 103.288 = -24.182$$

$$M_{aa'} = M_{aa''} = -0.25 \times 103.288 = -25.822$$

2 图 1 $m_c \neq 0, m_b \neq 0, m_1 = m_2 = m_3 = m_a = 0$ 的解

图 4 为对结点 c 的不平衡力矩 m_c ,对结点 b 的不平衡力矩 m_b 用三结点同时放松的弯矩分配法^[3]列表计算的一个循环.

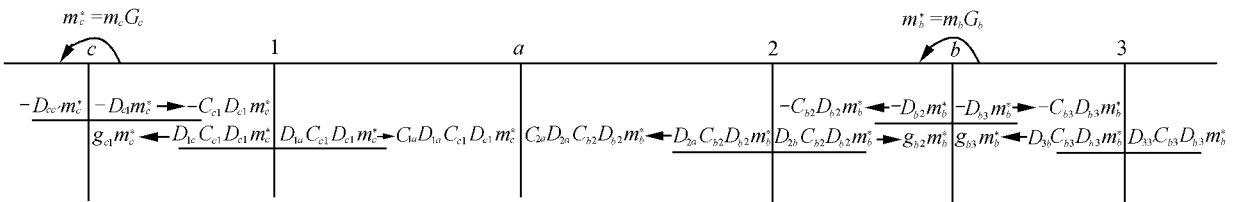


图 4 m_b, m_c 作用

Fig.4 Under the action of m_b and m_c

图 4 中一个循环分两个步聚:第一步,用刚臂固定结点 a ,同时放松结点 c ,对结点 c 的等效不平衡力矩 $m_c^* = m_c G_c$ 进行分配传递;第二步,用刚臂固定结点 a ,同时放松结点 b ,对结点 b 的等效不平衡力矩 $m_b^* = m_b G_b$ 进行分配传递.第一步和第二步在结点 a 形成不平衡力矩之和

$$A_a = C_{1a}D_{1a}C_{c1}D_{c1}m_c^* + C_{2a}D_{2a}C_{b2}D_{b2}m_b^* \quad (12)$$

而在其他结点已无不平衡力矩,故余下问题已转化为在 a 点作用不平衡力矩 A_a 的问题,其解仍可用式(10)表示,式(10)中 H_a^* 可由式(8)将 m_a 改为 A_a 得,即

$$H_a^* = A_a G_a G_{abc} \quad (13)$$

其中 G_a 见式(2), G_{abc} 见式(9),式(10)中 $H_b^* H_c^*$ 仍可由式(11)表示,式(10)和图4中的弯矩叠加为欲求的解。

3 图1 $m_c \neq 0, m_1 \neq 0, m_a \neq 0, m_2 \neq 0, m_b \neq 0, m_3 \neq 0$ 的解

将 m_1, m_2, m_3 分别在结点1,2,3按传统弯矩分配法分配一次,传递一次,使结点1,2,3上无不平衡力矩,而只有结点 c, a, b 上有不平衡力矩的问题前已讨论过。

4 结 语

本文给出五跨刚架的求解方法和公式,与传统弯矩分配法相比,传统弯矩分配法得近似解,本文方法得闭合解,传统弯矩分配法不能电算,本文杆端弯矩用公式表示则可编程电算。

参考文献:

- [1] 武汉水利电力学院建筑力学教研室. 结构力学[M]. 北京: 水利电力出版社, 1960. 197~206.
- [2] 徐汉忠. 结构力学中结点不平衡力矩分配传递的极限公式[J]. 河海大学学报, 1997, 25(6): 60~64.
- [3] 徐汉忠. 任意多跨连续梁的新弯矩分配法[J]. 工程力学, 2001, 18(增刊): 392~396.
- [4] 徐汉忠. 三跨刚架弯矩分配传递无限次的闭合解[J]. 南京理工大学学报, 2001, 25(4): 412~415.
- [5] 徐汉忠. 四杆封闭结构在任意荷载作用下的精确解[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2001, 29(5): 106~109.
- [6] 徐汉忠, 刘宁, 李海峰. 竖向荷载作用下高层框架的一种新的计算方法[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2002, 30(2): 54~57.

Closed solutions to rigid frames with 5 spans by infinitely distributed and carried over bending moments

XU Han-zhong¹, XIE Gui-hua², ZHANG Qian³

(1. College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China;

2. Suzhou Communication Engineering Quality Supervision Department, Suzhou 215003, China;

3. Southeast Design & Research Institute of China Construction, Nanjing 210024, China)

Abstract: The unbalance moments on nodes of stratified rigid frames with 5 spans are infinitely distributed and carried over by use of the bending moment distribution method, then the closed solutions to the rigid frames are obtained by summing up the distributed moments and carried over moments.

Key words: high-rise building; frame; rigid frame; closed solution