

基于四叉树网格的 Godunov 型二维水流数值计算模式

刘晓东¹, 华祖林¹, 赵玉萍²

(1. 河海大学环境科学与工程学院, 江苏 南京 210098; 2. 南京市鼓楼区环境监理大队, 江苏 南京 210009)

摘要:建立了基于四叉树网格的二维水流数学模型, 网格的生成通过以图像处理基本原理对种子点的循环划分得到, 控制方程采用有限体积法对守恒变量进行离散, 应用 Godunov 型通量差分裂格式计算边界上的法向数值通量, 并进行了丁坝绕流数值试验, 试验表明四叉树网格相对于传统矩形网格, 具有良好的分辨率, 数组容量经济, 易于局部加密, 用在复杂流动区域或强剪切流模拟中具有很高的效率, 且实测与计算值对比令人满意, 可以作为浅水流计算的一种模式。

关键词: 四叉树网格; 水流; 数值模拟; Godunov 型

中图分类号: TV131.3 文献标识码: A 文章编号: 1000-1980(2002)06-0006-05

自然水域有着各种复杂的边界条件, 水域内又有强梯度区和相对重要的局部, 用传统的矩形网格来剖分天然水域, 岸边界将概化成折线形, 若网格较粗则会产生较大误差, 网格过细则计算量会成倍增加, 为了解决上述问题, 可以用先进的自适应网格技术, 如边界拟合贴体技术^[1]、无结构网格^[2,3]、分层网格技术^[4]等, 四叉树分层网格作为一种处理复杂边界的有效网格方法, 近年来已得到广泛的研究和发展。

四叉树网格应用到计算流体力学, 最初是在航空航天领域, 用来计算复杂几何形状的流场, 如 1991 年美国的 Darren De Zeeuw 和 Kenneth G. Powell 首次提出了一种用于求解欧拉方程的矩形网格再细化算法, 并应用于气流的强梯度区, 计算结果验证了该算法的灵活性和对计算精度的提高, 以后逐渐被移植应用至水流数值模拟, 如 1998 年英国伦敦大学的 Deborah M. Greaves 和 Alistair G. L. Borthwick 利用自适应分层网格(即四叉树网格)模拟低雷诺数下的分离流^[4]。

四叉树网格应用到二维浅水流的数值模拟则始于 20 世纪 90 年代, 2001 年英国牛津大学的 Ben Rogers 等首次将四叉树网格应用到二维浅水模型^[5], 验证试验采用圆柱状水槽中风应力引起的环流, 二维无摩擦矩形域溃坝水流, 斜波水跃以及柱形水池中的射流模拟, 自适应四叉树网格, 相对于贴体结构网格, 不需要从物理平面到计算平面的转换, 因而流场计算中不再需要计算 Jacobian 矩阵, 使通量计算简单, 节约计算时间, 相对于无结构网格, 数据结构较为简单。

1 四叉树网格的生成方法

1.1 四叉树数据结构

四叉树最初应用于图像处理, 其基本原理是: 先将图像看成是一个正方形的单元, 如果该单元内有不同性质的多边形, 则将单元分成 4 个大小相同的二级单元, 然后分别判断这 4 个二级单元中是否还有性质不同的多边形, 如其中某个二级单元中有不同性质的多边形, 则将其划分成 4 个大小相同的三级单元, 这种逐级一分为四的方法一直继续到预定的最高分辨率, 网格生成方法正是基于这一基本原理, 通过对计算区域的循环划分实现。

1.2 网格划分算法

(a) 将计算区域边界线段的控制点用二次曲线拟合, 然后离散成有足够密度的网格生成控制点 $P_i, i = 1, \dots, m$ (b) 根据求解区域确定能覆盖所有区域的正方形或矩形 R_0 , 作为剖分的根单元 (c) 进行网格单元剖分, 将根单元剖分成 4 个子单元, 继续剖分, 直至使计算区域内部单元达到所需的最小划分级别 M_{\min} (d) 逐

单元循环,若单元中包含有网格生成控制点 P_i , 则继续划分为 4 个子单元, 记为 $R_i, R_{i+1}, R_{i+2}, R_{i+3}$, 直至达到所要求的精度(可用最大划分级别 M_{max} 来表示), 然后转入下一个单元(e)查找计算区域外单元并将其删除(f)最后对网格实行“光滑化”处理(g)四叉树网格划分结束。

1.3 网格“光滑”化处理

网格“光滑化”过程是指通过网格再细化, 使相邻网格的级别差不大于 1, 以限制离散误差在可控制范围内。这个过程是先搜索四叉树查找到不理想单元, 进行二次划分, 生成新单元, 从而得到“光滑”过的网格。图 1 给出了一个四叉树网格生成的例子(a)网格生成种子点(b) 1 级划分后的网格(c) 2 级划分后的网格(d) 4 级划分后的网格(e)“光滑”后的网格。

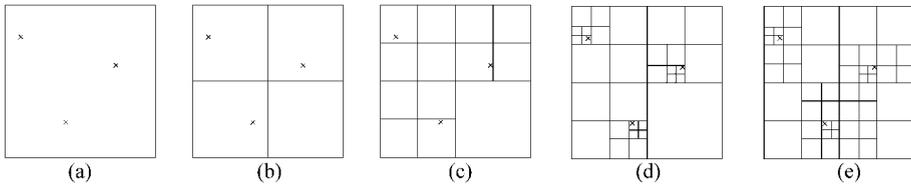


图 1 利用种子点生成四叉树网格的例子

Fig.1 An example of quad-tree grid generation by use of seed points

2 四叉树网格下基本方程及数值求解

2.1 基本方程

二维浅水方程组的守恒形式

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial y} = \mathbf{b}(\mathbf{q}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= [h, hu, hv]^T & \mathbf{f}(\mathbf{q}) &= [hu, hu^2 + gh^2/2, huv]^T \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= [hv, huv, hv^2 + gh^2/2]^T & \mathbf{b}(\mathbf{q}) &= [b_1, b_2, b_3]^T \\ b_1 &= 0 & b_2 &= gh(S_{0x} - S_{fx}) & b_3 &= gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{aligned}$$

式中: \mathbf{q} ——守恒物理量; $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ —— x 向通量; $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ —— y 向通量; $\mathbf{b}(\mathbf{q})$ ——源项; x, y, t ——空间及时间坐标系; h ——水深; u, v —— x 和 y 向沿水深积分平均流速分量; g ——重力加速度; S_{0x}, S_{fx} —— x 向的水底底坡和摩阻坡度; S_{0y}, S_{fy} —— y 向的水底底坡和摩阻坡度。

2.2 基本方程的有限体积法离散

网格生成后各物理量的布置方式见图 2^[2,3], 采用单元中心形式。

对于任意单元 Ω , 其边界为 $\partial\Omega$, 通过积分方程(1)并利用散度定理可得到有限体积法的基本方程

$$\iint_{\Omega} \mathbf{q}_t d\omega = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} dL + \iint_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{q}) d\omega \quad (2)$$

式中: \mathbf{n} ——单元边界 $\partial\Omega$ 的外法向单位向量; $d\omega, dL$ ——面积分和线积分微元; $\mathbf{F}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}$ ——法向数值通量。

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = [\mathbf{f}(\mathbf{q}), \mathbf{g}(\mathbf{q})]^T$$

采用一阶精度离散, 根据 \mathbf{f}, \mathbf{g} 具有的旋转不变性, 得到式(2)的等价公式

$$A \frac{\Delta \mathbf{q}}{\Delta t} = - \sum_{j=1}^m \mathbf{T}(\varphi)^{-1} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}) L_j + \mathbf{b}^*(\mathbf{q}) \quad (3)$$

$$\mathbf{b}^*(\mathbf{q}) = (A \cdot b_1, A \cdot b_2, A \cdot b_3)$$

式中: $\mathbf{T}(\varphi)$ ——坐标轴旋转角度 φ 的变换矩阵; m ——单元边总数; L_j ——单元边 j 的长度; A ——单元面积。

因为在单元每一边两侧的 \mathbf{q} 值不同, 所以问题可归结为如何确定法向通量, 它通过解局部一维黎曼问题求得。

2.3 跨单元法向数值通量的计算

采用 Godunov 型通量差分裂(FDS)格式进行法向通量的近似计算^[2]。利用一维通量差分裂的方法, 跨单元界面的法向数值通量

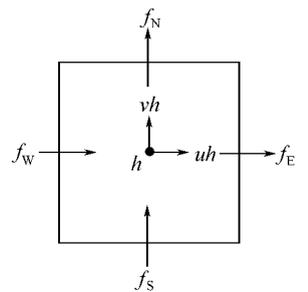


图 2 控制体积上变量布置
Fig.2 Collocation of variables on control volume

$$f(\bar{q}) = \frac{1}{2} [f_L(\bar{q}) + f_R(\bar{q}) - \sum_{k=1}^3 |\bar{\lambda}_k| \cdot \bar{\alpha}_k \cdot \bar{R}_k]$$

式中 $\bar{\lambda}_k$ ——雅可比阵的特征值 $\bar{\alpha}_k(q)$ ——特征强度 $\bar{R}_k(q)$ ——特征向量

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{u} + \bar{c} \quad \bar{\lambda}_2 = \bar{u} \quad \bar{\lambda}_3 = \bar{u} - \bar{c}$$

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{1}{2c} [(hu)_L - (hu)_R - \bar{\lambda}_3(h_L - h_R)]$$

$$\bar{\alpha}_2 = (hv)_L - (hv)_R - \bar{v}(h_L - h_R) \quad \bar{\alpha}_3 = (h_L - h_R) - \bar{\alpha}_1$$

$$\bar{R} = (\bar{R}_1 \bar{R}_2 \bar{R}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \bar{u} + \bar{c} & 0 & \bar{u} - \bar{c} \\ \bar{v} & 1 & \bar{v} \end{bmatrix}$$

上标“ $\bar{}$ ”表示变量取 Roe 区间平均^[2]。 $c = \sqrt{gh}$ 为波速。对算出的 $f(\bar{q})$ 作逆旋转变换便可得到原始坐标系下的法向数值通量。

2.4 不同级别单元间通量计算

四叉树网格的生成使得相邻单元间的级别可能不一,即在两个单元界面间存在悬挂节点。对于所有可能的网格布置,单元界面左右的状态 \bar{q}_L 和 \bar{q}_R 必须通过插值来估计。显然,插值方法的选取非常关键,必须在足够的精度和技术实现的复杂性之间取得平衡。采用三角形线性插值,数值试验表明该方法具有足够精度且易于实现。对于不同级别相邻单元布置可归纳为4种情形,如图3(a~d)所示,其余布置均可通过旋转变换找到对应情形。在图3中, q_1 所在单元为当前计算单元, q_2 为其不同级别的相邻单元,单元间的通量计算必须借助于虚拟单元(q 所在的单元)得到。虚拟单元上守恒物理量 q 的值通过下式得到:

图3(a) $q = \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{4}(q_2 + q_3)$ 图3(b) $q = \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{3}q_2 + \frac{1}{6}q_3$

图3(c) $q = \frac{1}{4}q_1 + \frac{1}{2}q_2 + \frac{1}{4}q_3$ 图3(d) $q = \frac{1}{3}q_1 + \frac{1}{2}q_2 + \frac{1}{6}q_3$

由于虚拟单元与计算单元处于同等级别,其数值通量计算可采用前述方法求解得到,从而得到不同级别单元间的法向数值通量。

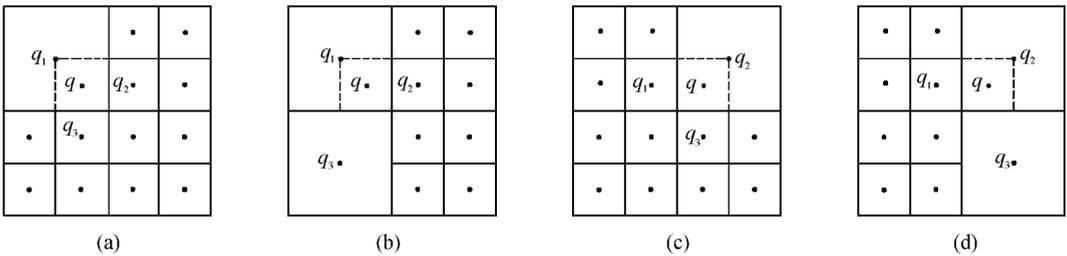


图3 不同级别相邻单元网格布置示意图

Fig.3 Collocation of various-level neighbor grids

2.5 数值稳定性

由于模式采用显格式计算,故时间步长 Δt 受限于 Courant-Friedrichs-Levy 条件,具体表达式如下:

$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta s} \left| \frac{\Delta f(\bar{q})}{\Delta q} \right|_{\max} \leq 1$$

式中 Δs 为相邻两单元间距离的最小值。根据文献[2],为满足数值稳定性, Δt 应满足 $CFL < 0.3$ 。

3 丁坝绕流数值试验

为了检验四叉树网格下二维水流模型,采用紊动性较强的丁坝绕流来验证。数值试验模拟计算了丁坝对流速分布引起的变化。

3.1 丁坝绕流试验情况①

试验水槽长 30 m、宽 4.2 m、深 0.4 m,水槽底坡 0.001,槽底用水泥浆抹面但不光滑,糙率为 0.0134。试验

① 该试验由陆永军在河海大学河流动力学实验室完成。

流量 $Q = 0.04 \sim 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$, 水深为 0.12 m , 丁坝长度取 0.4 m .

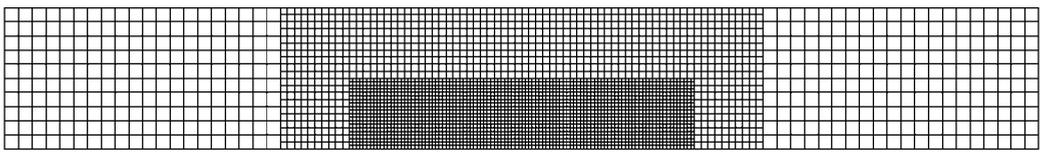
3.2 数值计算条件

为了检验模型, 采用不同的网格布置, 并比较计算结果. 试验 1 采用均匀的矩形粗网格, 纵向 Δx 取 0.2 m , 共分 150 个单元 ($0.2 \times 150 = 30 \text{ m}$), 横向 Δy 取 0.2 m , 共分 20 个单元 ($0.2 \times 20 = 4.0 \text{ m}$), 共 3000 个单元.

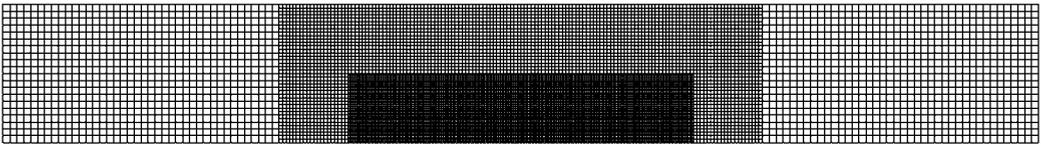
试验 2 采用均匀的矩形细网格, 精确模拟水流绕过坝后的回流, 网格划分较细, 纵向 Δx 取 0.1 m , 共分 300 个单元 ($0.1 \times 300 = 30 \text{ m}$), 横向 Δy 取 0.1 m , 共分 40 个单元 ($0.1 \times 40 = 4.0 \text{ m}$), 共 12000 个单元.

试验 3 采用二叉树网格局部加密 (如图 4(a)所示), 一级网格纵向 Δx 、横向 Δy 均取 0.4 m , 共 400 个单元, 二级网格纵向 Δx 、横向 Δy 均取 0.2 m , 共 900 个单元, 三级网格纵向 Δx 、横向 Δy 均取 0.1 m , 共 2000 个单元. 最细的丁坝附近网格解析度与试验 2 相同, 但单元数少得多, 总计 3300 个网格.

试验 4 采用二叉树网格进一步加密 (如图 4(b)所示), 一级网格纵向 Δx 、横向 Δy 均取 0.2 m , 共 1600 个单元, 二级网格纵向 Δx 、横向 Δy 均取 0.1 m , 共 3600 个单元, 三级网格纵向 Δx 、横向 Δy 均取 0.05 m , 共 8000 个单元. 总计 13200 个网格. 控制条件为上游流量 $Q = 0.04 \text{ m}^3/\text{s}$, 下游水位 0.1 m .



(a) 试验3



(b) 试验4

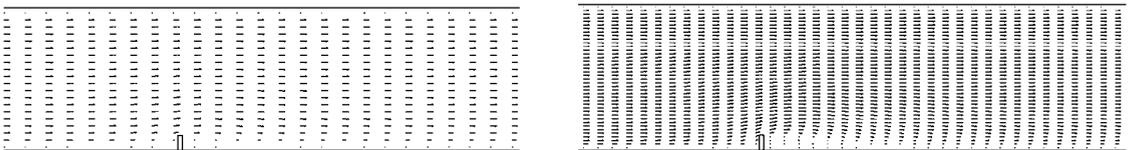
图 4 二叉树网格

Fig.4 Quad-tree grids

3.3 结果验证

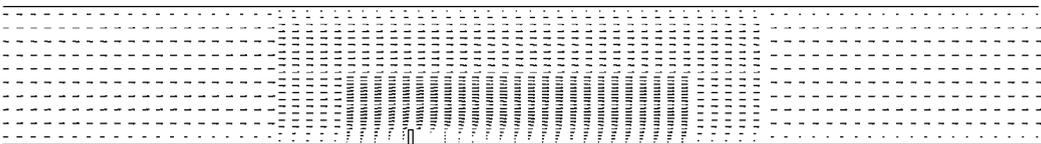
计算结果见图 5. 从图上可看出, 试验 1 由于网格较粗, 坝后回流反映不明显, 试验 2 网格较细, 计算结果较理想, 能基本反映丁坝绕流机理, 回流区长度约为丁坝长度的 10 倍. 可见, 对于传统的矩形网格, 解析度每增加 1 倍, 网格数将增加到原来的 4 倍, 从而使计算量大大增加.

试验 3 和试验 4 均采用二叉树网格. 试验 3 的解析度与试验 2 相当, 但网格数少得多, 减少了计算量, 节约了计算时间. 计算结果能基本反映丁坝绕流机理, 回流区长度约为丁坝长度的 8.5 倍. 为了精确模拟水流

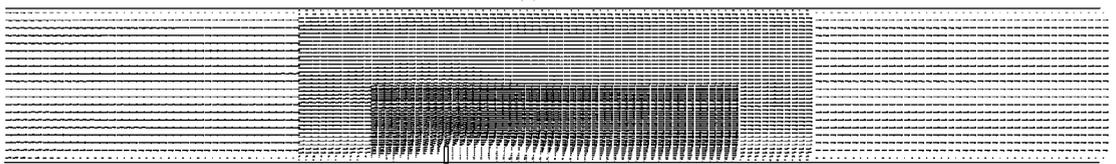


(a) 试验1

(b) 试验2



(c) 试验3



(d) 试验4

图 5 丁坝绕流计算流场

Fig.5 Calculated circumfluent field around groin

绕过坝后的回流,试验4采用更高解析度的网格,最小网格长度仅5 cm,网格数与试验2相当.计算结果能较好反映丁坝绕流机理,回流区长度约为丁坝长度的10.5倍.

多次试验结果表明,四叉树网格数学模型能够反映丁坝上游主流收缩,水流偏向对岸,水流绕过坝头后,由于惯性作用,主流宽度继续收缩,形成主流最窄(回流最宽)的收缩断面.随后主流逐渐扩散,同时坝后形成回流区,回流区长度约为丁坝长度的8.5~10.5倍.将计算值与试验量测结果进行比较,两者符合良好,其中对主流区的模拟精度较高,但对回流区的模拟与试验结果有一定的偏差.试验4的具体比较结果见图6.

4 结 论

a. 对计算区域复杂不规则边界情形,四叉树网格布置具有良好的适应性,其布置方法较拟合坐标法更为简便,同时对重要水域四叉树网格局部加密容易,可根据边界灵活掌握.

b. 在四叉树网格基础上,本文建立了有限体积法(FDS)格式二维浅水流计算模式,模式具有计算工作量小、稳定性好、收敛快的优点,可作为解决复杂边界浅水流计算中一种预测模式.

c. 可根据流场特点,在强梯度区和相对重要区域进行自适应加密网格,从而提高流场解析度和计算精度.

d. 通过4种不同网格方法网格划分,对丁坝绕流这一较为典型的治河工程流场计算表明,采用四叉树网格布置,试验值与计算值吻合良好,提高了计算效率.

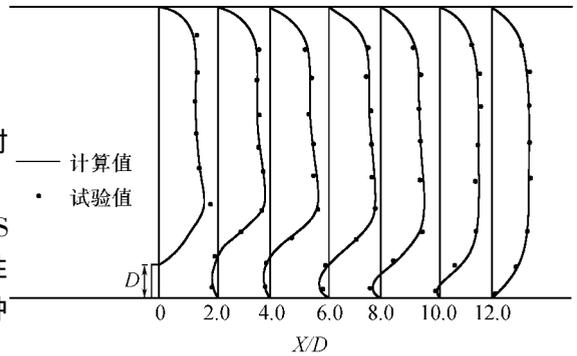


图6 试验4丁坝绕流计算值与试验值比较

Fig.6 Comparison between computational results and observed data

参考文献:

- [1] Thompson J F. Body-fitted coordinate system for numerical solution of partial differential equations[J]. J Comput Phys, 1982(47): 1~108.
- [2] Zhao D H, Shen H W, Lai J S et al. Riemann solvers in FVM for 2D hydraulic shock wave modeling[J]. J Hydr Engrg, ASCE, 1996, 122(12): 692~702.
- [3] 赵棣华, 戚晨, 庚维德, 等. 平面二维水流-水质有限体积法及黎曼近似解模型[J]. 水科学进展, 2000(4): 368~373.
- [4] Deborah M Greaves, Borthwick A G L. On the use of adaptive hierarchical meshes for numerical simulation of separated flow[J]. Int J Numer Meth fluids, 1998, 26: 303~322.
- [5] Ben Rogers, Masayuki Fujihara, Borthwick A G L. Adaptive Q-tree godunov-type scheme for shallow water equations[J]. Int J Numer Meth Fluids, 2001, 35: 247~280.

Quad-tree meshes based Godunov-type 2-D flow numerical model

LIU Xiao-dong¹, HUA Zu-lin¹, ZHAO Yu-ping²

(1. College of Environmental Science and Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China;

2. Environment Supervision Division, Gulou District, Nanjing 210009, China)

Abstract: Based on the quad-tree mesh, a numerical model of 2-D shallow water equations (SWEs) is established, in which the grids are generated by recursive subdivision of seed points. By use of the finite volume method, conservative variables are discretized by the governing equations, and the normal flux through boundaries is calculated by the Godunov-type flux difference splitting (FDS) scheme. The model is applied to simulation of the flow field in groin experiments, and the calculated values and observed data are in good agreement. The results indicate that the quad-tree mesh is high in local resolution, economical in array size, and easy to be densified, and that the mesh is of high efficiency when applied to simulation of complex flow domains and strong shear flows. Therefore, it can be used as a numerical model to predict flow and concentration fields of actual shallow waters.

Key words: quad-tree grid; flow; numerical simulation; Godunov-type