第 30 卷第 6 期 河海大学学报(自然科学版) Vol.30 No.6
2002 年 11 月 JOURNAL OF HOHAI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCES) Nov. 2002

双 Carleson 测度的积分不等式及对 Carleson 逆不等式的刻画

张斌武[1],孟红兵[2]

(1.河海大学常州校区数理部,江苏 常州 213022;2.陕西师范大学数学系,陕西 西安 710062)

摘要 :利用 α 阶 Carleson 测度($\alpha>0$)的定义以及算子理论方面的有关知识研究 Carleson 测度,得到了关于一对 Carleson 测度的积分不等式定理以及 α 阶($\alpha>0$)Carleson 测度 μ 在满足一定的条件下 Carleson 测度逆不等式定理,从而对引理 1 进行了推广,同时对 Carleson 逆不等式结合高阶导数方面作了探讨.

关键词 :Carleson 测度;L_a^p 函数;Carleson 逆不等式.

中图分类号 :O177.2 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2002)06-0044-04

1 准备知识

自从 Carleson 提出 Carleson 测度以后,许多人在这方面做了大量的工作,其中很著名的是文献[1]中的用 L_a^p 函数刻画 Carleson 测度定理,后来有人提出,单位圆盘 D 上的有限正 Borel 测度 μ 在满足何种条件下有

$$\int_D |f|^p \mathrm{d}m \leqslant C\int_D |f|^p \mathrm{d}\mu$$

对一切 $f\in L_a^p$ 成立?其中 $\mathrm{d}m(z)=\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, z=x+\mathrm{i}y$.这个问题便是 Carleson 逆不等式问题.

令 $\rho(z,w)$为伪双曲距离,即 $\rho(z,w)=\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|$,对 $a\in D, 0<r<1$ 令 $D_r(a)=\{z;\rho(a,z)<r\}$,根据伪双曲距离的共形不变性,若令 $w=\varphi_a(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$,则若 $z\in D_r(0)$,则 $w\in D_r(a)$.

记 $D(a)=D_{\frac{1}{2}}(a)$,并用$|D_r(a)|$表示 $D_r(a)$的面积 $m(D_r(a))$.

本文利用的 L_a^p 空间及 α 阶 Carleson 测度等的定义以及其它定义见文献[1~4].

Lueking.D.H 对 Carleson 逆不等式做了深入的研究,得到:

引理 1[3] 令 $p>0, \varepsilon>0, \mu$ 是单位圆盘 D 上的一阶 Carleson 测度,记

$$\|\mu\|_* = \sup\left\{\frac{\mu(D(a))}{|D(a)|};a\in D\right\}<+\infty$$

若存在充分小的 $\beta>0$,使得集合

$$G=\left\{z\in D;K_\beta(z)=\frac{\mu(D_\beta(z))}{|D_\beta(z)|}>\varepsilon\|\mu\|_*\right\}$$

满足(δ)条件,即存在常数 $\delta>0$,使得

$$m(G\cap S)>\delta m(S)$$

对一切 $S=S_{\theta,h}=\{w=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};1-h\leqslant r<1, \theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_0+h\}$成立,$\theta_0$ 为任意实数,$0<h<1$,则存在常数 $C>0$,使得

收稿日期:2001-11-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10071047);河海大学常州校区青年科研基金资助项目(CJ2000-01)

作者简介:张斌武(1969—),男,新疆乌苏人,讲师,浙江大学数学系博士生,运筹学专业,现从事运筹学与控制论研究.

$$\int_D |f(z)|^p \mathrm{d}m(z) \leqslant C\int_D |f(z)|^p \mathrm{d}\mu(z)$$

对一切 $f\in L_a^p$ 成立.

引理 2[3]　设 $a\in D$,r 固定,$0<r<1$,$f(z)$是 D 上的解析函数,$p\geqslant 1$,则存在常数 $C>0$,有

$$|f^{(n)}(a)|^p \leqslant \left(C2^n \frac{(n+2)n!}{(1-r)^{n+2}}\right)^p \frac{\int_{D_r(a)} |f|^p \mathrm{d}m}{(r(1-|a|))^{2+np}}$$

对一切 $f\in A(D)$成立,这里 $A(D)$是 D 上的解析函数的全体.

2　主 要 定 理

定理 1　设 $p>0$,$\alpha>0$,$0<\beta<\frac{1}{4}$,令 μ 是 D 上的 α 阶 Carleson 测度,ν 是 D 上的一阶 Carleson 测度,则存在常数 B(仅依赖 p),有

$$\int_D\int_D \frac{\chi_\beta(w,z)}{m(D_\beta(z))^\alpha} |f(w)-f(z)|^p \mathrm{d}\nu(z)\mathrm{d}\mu(w) \leqslant B\beta^p\int_D |f|^p \mathrm{d}m$$

对一切 $f\in L_a^p$ 成立,这里

$$\chi_\beta(w,z)=\begin{cases}1 & 当\ \rho(z,w)<\beta\\ 0 & 当\ \rho(z,w)\geqslant\beta\end{cases}$$

证明　根据正规族的有关知识可知存在常数 $C>0$,使得当 $|z|<\beta<\frac{1}{4}$ 时,有

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{z}\right|^p \leqslant C\int_{D(0)} |f(z)|^p \mathrm{d}m(z)$$

对一切 $f\in L_a^p$ 成立,因此

$$\chi_\beta(z,0)|f(z)-f(0)|^p \leqslant C\beta^p\chi_\beta(z,0)\int_{D(0)} |f(z)|^p \mathrm{d}m$$

以 $f(\phi_a(z))$代替上式中的 f,其中 $w=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.再由伪双曲距离 ρ 的共形不变性及变量替换得

$$\chi_\beta(w,a)|f(w)-f(a)|^p \leqslant C\beta^p\chi_\beta(w,a)\int_{D(a)} |f(\xi)|^p \frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\bar{a}\xi|^4}\mathrm{d}m(\xi)$$

由于存在常数 $C>0$,使得对一切 $\xi\in D(a)$有不等式

$$\frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\bar{a}\xi|^4} \leqslant C(1-|\xi|)^{-2}$$

成立,再由已知 μ 是 D 上的 α 阶 Carleson 测度,利用 Fubini 定理得

$$\int_D \frac{\chi_\beta(w,a)}{m(D_\beta(a))^\alpha}|f(w)-f(a)|^p \mathrm{d}\mu(w) \leqslant CC_1\beta^p\int_D \chi_{D(a)}|f(\xi)|^p(1-|\xi|)^{-2}\mathrm{d}m(\xi)$$

其中 $\chi_{D(a)}$代表 $D(a)$上的特征函数,上式两端对 ν 对于变量 a 积分,再利用 Fubini 定理得

$$\int_D\int_D \frac{\chi_\beta(w,a)}{m(D_\beta(a))^\alpha}|f(w)-f(a)|^p \mathrm{d}\mu(w)\mathrm{d}\nu(a) \leqslant$$

$$CC_1\beta^p\int_D |f(\xi)|^p(1-|\xi|)^{-2}\nu(D(\xi))\mathrm{d}m(\xi) \leqslant CC_1C_2\beta^p\int_D |f(\xi)|^p \mathrm{d}m(\xi)$$

上面第二个不等式用到了 ν 是一阶 Carleson 测度及 $m(D(\xi))\sim(1-|\xi|)^2$,令 $B=CC_1C_2$ 便得定理结论.

定理 2　设 $0<p<+\infty$,$\alpha>0$,$\varepsilon>0$,并令 $\alpha'=\begin{cases}\alpha & 当\ \alpha<1\ 时\\ 1 & 当\ \alpha\geqslant 1\ 时\end{cases}$.设 μ 是 D 上的 α 阶 Carleson 测度,记

$$\|\mu\|_* = \sup\left\{\frac{\mu(D(a))}{|D(a)|^{\alpha'}};a\in D\right\}$$

若存在充分小的 $\beta>0$,使得

$$G=\left\{z\in D,K_\beta(z)=\frac{\mu(D_\beta(z))}{|D_\beta(z)|^{\alpha'}}>\varepsilon\|\mu\|_*\right\}$$

满足(δ)条件,则存在常数 $C>0$,使得

$$\int_D |f(z)|^p \mathrm{d}m(z) \leqslant C\int_D |f(z)|^p \mathrm{d}\mu(z)$$

对一切 $f\in L_a^p$ 成立.

证明 由于 μ 是 D 上的 α 阶 Carleson 测度,从而由 α' 的定义可知 μ 亦是 α' 阶 Carleson 测度,再利用定理1,取 $m=\nu$,得

$$\int_D\int_D \frac{\chi_\beta(w,z)}{m(D_\beta(z))^\alpha}|f(w)-f(z)|^p \mathrm{d}m(z)\mathrm{d}\mu(w) \leqslant C\beta^p \|\mu\|_* \int_D |f(z)|^p \mathrm{d}m(z)$$

无妨设 $p>0$,(当 $0<p<1$ 时,两端开 p 次方,其它证明类似)对上式两端开 p 次方,再利用三角不等式得:

$$\left(\int_D\int_D \frac{\chi_\beta(w,z)}{m(D_\beta(z))^{\alpha'}}|f(z)|^p \mathrm{d}m(z)\mathrm{d}\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_D\int_D \frac{\chi_\beta(w,z)}{m(D_\beta(z))^{\alpha'}}|f(w)|^p \mathrm{d}m(z)\mathrm{d}\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(C\beta^p \|\mu\|_* \int_D |f(z)|^p \mathrm{d}m(z)\right)^{\frac{1}{p}}$$

又由 G 的定义,有

$$\int_D \frac{\chi_\beta(w,z)}{m(D_\beta(z))}\mathrm{d}\mu(w) = \int_{D_\beta(z)} \frac{\mathrm{d}\mu(z)}{m(D_\beta(z))^{\alpha'}} = k_\beta(z) \geqslant \varepsilon \|\mu\|_* \chi_G(z)$$

又当 $\rho(z,w)<\beta$ 时,$m(D_\beta(z)) \sim m(D_\beta(w))$,故

$$\int_D \frac{\chi_\beta(w,z)}{m(D_\beta(z))^{\alpha'}}\mathrm{d}\mu(z) \leqslant \frac{c'm(D_\beta(w))}{m(D_\beta(w))^{\alpha'}} = \frac{C'}{m(D_\beta(w))^{\alpha'-1}}$$

从而由前面得到的不等式得

$$\left[\int_D \varepsilon\|\mu\|_*\chi_G(z)|f(z)|^p \mathrm{d}m(z)\right]^{\frac{1}{p}} - \left[C'\int_D \frac{|f(w)|^p \mathrm{d}\mu(w)}{m(D_\beta(w))^{\alpha'-1}}\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[C\beta^p\|\mu\|_*\int_D |f(z)|^p \mathrm{d}m(z)\right]^{\frac{1}{p}}$$

由于 G 满足(δ)条件,故由引理1得知,存在常数 $A>0$,使

$$\int_D |f(z)|^p \mathrm{d}m(z) \geqslant A\int_D |f(z)|^p \mathrm{d}m(z)$$

对一切 $f\in L_a^p$ 成立,再选取充分的小 β,使得 $C\beta^p<\varepsilon A$,则有

$$\int_D |f(z)|^p \mathrm{d}m(z) \leqslant \frac{C'}{\left[(\varepsilon A\|\mu\|_*)^{\frac{1}{p}} - (C\beta^p\|\mu\|_*)^{\frac{1}{p}}\right]^p}\int_D \frac{|f(z)|^p \mathrm{d}m(z)}{m(D_\beta(w))^{\alpha'-1}} = C\int_D \frac{|f(z)|^p \mathrm{d}m(z)}{m(D_\beta(w))^{\alpha'-1}}$$

当 $\alpha\geqslant 1$ 时,$\alpha'=1$,故对任意的 $f\in L_a^p$ 有

$$\int_D |f(z)|^p \mathrm{d}m(z) \geqslant C\int_D |f(z)|^p \mathrm{d}\mu(z)$$

成立,当 $\alpha<1$ 时,由 $m(D_\beta(z))<1$ 及 $\alpha=\alpha'$ 得对任意的 $f\in L_a^p$ 上式仍然成立.

结合高阶导数和一对 Carleson 测度可以得到:

定理3 设 $p>0,\beta>0,n$ 是正整数,ν 是 α 阶 Carleson 测度($\alpha>0$),μ 是 $1+\frac{np}{2}$ 阶 Carleson 测度,则存在常数 $B=C(n,\beta,p)$,使得

$$\int_D\int_D \frac{\chi_\beta(w,z)}{m(D_\beta(z))^\alpha}|f^{(n)}(w)|^p \mathrm{d}\mu(z)\mathrm{d}\nu(w) \leqslant B\|\nu\|_*\|\mu\|_*\int_D |f(\xi)|^p \mathrm{d}m(\xi)$$

对一切 $f\in L_a^p$ 成立,这里 $\|\mu\|_* = \sup\left\{\frac{\mu(D_\beta(a))}{m(D_\beta(a))^{1+\frac{np}{2}}};a\in D\right\}$,$\|\nu\|_* = \sup\left\{\frac{\nu(D_\beta(a))}{m(D_\beta(a))^\alpha};a\in D\right\}$.

证明 根据引理2有

$$|f^{(n)}(w)|^p \leqslant C(n,\beta,p)\frac{\int_{D_\beta(w)}|f(\xi)|^p \mathrm{d}m(\xi)}{(1-|w|)^{2+np}}$$

对上式两端同乘以 $\frac{\chi_\beta(w,z)}{m(D_\beta(z))^\alpha}$,再对 μ 关于 z 积分得

$$\int_D \frac{\chi_\beta(w,z)}{m(D_\beta(z))^\alpha}|f^{(n)}(w)|^p \mathrm{d}\mu(z) \leqslant$$

$$C(n,\beta,p)\int_D \frac{\chi_\beta(w,z)}{m(D_\beta(z))^\alpha}\mathrm{d}\mu(z)\cdot\int_{D_\beta(w)}\frac{|f(\xi)|^p\mathrm{d}m(\xi)}{(1-|w|)^{2+np}}\leqslant$$

$$C(n,\beta,p)\,C_\beta\int_{D_\beta(z)}\frac{\chi_\beta(w,z)}{(1-|w|)^{2+np}}\mathrm{d}\mu(z)\int_{D_\beta(w)}\frac{|f(\xi)|^p\mathrm{d}m(\xi)}{m(D_\beta(w))^\alpha}\leqslant$$

$$C(n,\beta,p)\,C_\beta\,\|\mu\|_*\int_{D_\beta(w)}\frac{|f(\xi)|^p\mathrm{d}m(\xi)}{m(D_\beta(z))^\alpha}$$

上面第二个不等式用到 当 $\rho(z,w)<\beta$ 时，$m(D_\beta(z))\sim m(D_\beta(w))$，第三个不等式用到当 $\rho(z,w)<\beta$ 时，$(1-|z|^2)^2\sim m(D_\beta(z))\sim|1-|w||^2$. 进而对 ν 关于 w 积分得

$$\int_D \frac{\chi_\beta(w,z)}{m(D_\beta(z))^\alpha}|f^{(n)}(w)|^p\mathrm{d}\mu(z)\leqslant C(n,\beta,p)\,C_\beta\,\|\mu\|_*\int_{D_\beta(w)}\frac{|f(\xi)|^p\mathrm{d}m(\xi)}{m(D_\beta(z))^\alpha}$$

$$\int_D\int_D \frac{\chi_\beta(w,z)}{m(D_\beta(z))^\alpha}|f^{(n)}(w)|^p\mathrm{d}\mu(z)\mathrm{d}\nu(w)\leqslant$$

$$C_\beta C(n,\beta,p)\cdot\|\mu\|_*\cdot\int_D\frac{\int_{D_\beta(w)}|f(\xi)|^p\mathrm{d}m(\xi)}{m(D_\beta(w))^\alpha}\mathrm{d}\nu(w)\leqslant$$

$$C_\beta C(n,\beta,p)\cdot\|\mu\|_*\cdot\int_D|f(\xi)|^p\mathrm{d}m(\xi)\int_{D_\beta(\xi)}\frac{\mathrm{d}\nu(w)}{m(D_\beta(w))^\alpha}\leqslant$$

$$C_\beta C(n,\beta,p)\cdot\|\mu\|_*\cdot\|\nu\|_*\cdot\int_D|f(\xi)|^p\mathrm{d}m(\xi)=$$

$$B\cdot\|\mu\|_*\cdot\|\nu\|_*\cdot\int_D|f(\xi)|^p\mathrm{d}m(\xi)$$

对 D 上的 α 阶 $(\alpha>0)$ Carleson 测度 μ 在满足什么条件就会有逆不等式

$$\int_D|f^{(n)}(z)|^p\mathrm{d}m(z)\leqslant C\int_D|f(z)|^p\mathrm{d}\mu(z)$$

对一切 $f\in L_a^p$ 成立这个问题需要进一步的研究，希望本文得到的定理 3 对该问题的研究有所帮助.

参考文献：

[1] Carleson L. An interpolation problem for bounded analytic functions[J]. Annals of Math, 1958, 80: 920 ~ 930.

[2] Zhu K H. Operator theory in function spaces[M]. New York: Dekker, 1990. 46 ~ 50, 56 ~ 61.

[3] Lueking D H. Forword and reverse Carleson inequalsties for functions in Bergman spaces and their derivatives[J]. Amer J Math, 1985, 107: 85 ~ 111.

[4] 张斌武. 有关 Carleson 测度的等价刻画[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2001, 29(2): 11 ~ 14.

Inequality to describe double Carleson measure and description of Carleson inverse inequality

ZHANG Bin-wu[1], MENG Hong-bing[2]

(1. *Department of Mathematics and Physics*, *Hohai Univ. Changzhou Branch*, *Changzhou* 213022, *China*;
2. *Department of mathematics*, *Shannxi Normal Univ.*, *Xi'an* 710062, *China*)

Abstract: Based on the definition of the Carleson measure with α-order ($\alpha>0$) and related operator theory, a study is performed on the Carleson measure. An integral inequality theorem on double Carleson measure is obtained, and by expansion of the Lemma 1, an inverse inequality theorem is deduced to describe the Carleson measure μ with α-order ($\alpha>0$) under a certain condition. Furthermore, a discussion is made on the combination of the Carleson inverse inequality with higher-order derivatives.

Key words: Carleson measure; L_a^P function; Carleson inverse inequality