

非正交曲线同位网格三维水动力数值模型

夏云峰, 薛鸿超

(河海大学交通与海洋工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 建立一个自由表面三维水动力学计算模型, 平面采用贴体坐标变换, 竖直方向 σ 坐标变换. 基于有限体积法, 同位网格布置即流速、压力布置于同一控制点上. 自由表面由二维水深积分方程中的水位方程求解, 运用 SIMPLEC 法求解速度-压力耦合问题, 动水压力校对方程校正压力和流速场. 标准 $k-\epsilon$ 紊流模型计算紊动粘性系统以封闭 Reynolds 应力项. 运用该数值模型模拟 S 形弯道水流三维流动.

关键词: 坐标变换; 动量插值; 自由表面; 三维水流数值模型

中图分类号: TV131.2 文献标识码: A 文章编号: 1000-198X(2002)06-0074-05

随着计算机的迅速发展, 二维水流泥沙数值模型已得到广泛运用, 但二维水沙运动的模拟只能反映平面上水沙因子的变化. 在河流的弯曲和分叉处, 其环流结构及其泥沙输移是三维河流水沙运动的主要特征. 为此, 对三维水流运动的模拟是水流泥沙数值模型的发展方向.

1 控制方程

1.1 笛卡儿坐标系下三维水流运动方程

基于 Boussinesq 假设的不可压牛顿流体 N-S 方程的 Reynolds 时均方程:

$$\text{连续性方程} \quad \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\text{动量方程} \quad \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2)$$

$$P = p_d + \rho g(\zeta - z) \quad \mu_t = \rho \nu_t = \rho C_\mu k^2 / \epsilon \quad (3)$$

式中: ρ ——流体密度; u_i, u_j ——流速; P ——总压力, 由静水压力和动水压力 p_d 组成, 设水表面压强为零; ζ ——基面上水位; ν_t ——紊动粘性系数; k, ϵ 由标准 $k-\epsilon$ 紊流模型确定^[1].

上述方程可以写成统一形式的对流-扩散微分方程 ($\Phi = 1, u, v, w, k, \epsilon$):

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \Phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + S_\Phi \quad (4)$$

1.2 曲线坐标系下控制方程

曲线坐标系中, 平面采用 Poisson 方程生成边界拟合曲线坐标系 (ξ, η). 对于单值自由表面流动, 竖直方向上采用 σ 坐标转换

$$\sigma = \frac{z - \zeta}{H} \quad (-1 < \sigma < 0, z \in (-h, \zeta))$$

$$H = h + \zeta$$

式中: H ——总水深; h ——基面下水深. 在新坐标系 (ξ, η, σ) 下, 见图 1:

$$U = u\eta_\eta - v\xi_\eta \quad V = v\xi_\xi - u\eta_\xi \quad (5)$$

式中 U, V 为边界拟合曲线坐标系 (ξ, η) 逆变速度^[2].

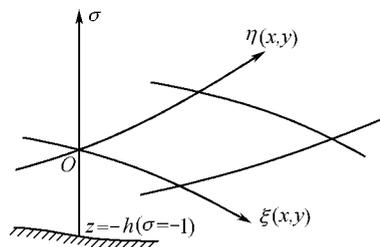


图 1 曲线坐标系 (ξ, η, σ)
Fig. 1 Curvilinear coordinate system (ξ, η, σ)

令
$$W = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + u \frac{\partial\sigma}{\partial x} + v \frac{\partial\sigma}{\partial y} + w \frac{\partial\sigma}{\partial z} = \frac{1}{H} \left[w - (1 + \sigma) \frac{\partial\zeta}{\partial t} - (Uz_\xi + Vz_\eta) \right] / J \quad (6)$$

由导数链式规则 控制方程(4)转化为曲线坐标系下控制方程:

连续性方程
$$\frac{\partial\rho HJ}{\partial t} + \frac{\partial\rho HU}{\partial\xi} + \frac{\partial\rho HV}{\partial\eta} + \frac{\partial\rho HJW}{\partial\sigma} = 0 \quad (7)$$

动量方程 ($\Phi = u, v, w$)

$$\frac{\partial\rho HJ\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\rho HU\Phi}{\partial\xi} + \frac{\partial\rho HV\Phi}{\partial\eta} + \frac{\partial\rho HJW\Phi}{\partial\sigma} = \frac{\partial}{\partial\xi} \left[\frac{HG_\Phi}{J} (\alpha\Phi_\xi - \beta\Phi_\eta + \frac{q_{13}}{H}\Phi_\sigma) \right] + \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\frac{HG_\Phi}{J} (-\beta\Phi_\xi + \gamma\Phi_\eta + \frac{q_{23}}{H}\Phi_\sigma) \right] + \frac{\partial}{\partial\sigma} \left[\frac{G_\Phi}{J} (q_{31}\Phi_\xi + q_{32}\Phi_\eta + \frac{q_{33}}{H}\Phi_\sigma) \right] + S_\Phi \quad (8)$$

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \quad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad G_\Phi = \frac{\mu_t}{\sigma_\Phi}$$

$$q_{13} = q_{31} = -\alpha z_\xi + \beta z_\eta \quad q_{23} = q_{32} = \beta z_\xi - \gamma z_\eta \quad \mathcal{A}(\xi, \eta, \sigma, t) = \sigma h + (1 + \sigma)\zeta \quad q_{33} = J^2 + (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)^2 + (x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi)^2 \quad (9)$$

当 $\Phi = u$ 时

$$S_\Phi = -\rho g H (y_\eta \zeta_\xi - y_\xi \zeta_\eta) - H y_\eta \frac{\partial p_d}{\partial \xi} + H y_\xi \frac{\partial p_d}{\partial \eta} + (y_\eta z_\xi - y_\xi z_\eta) \frac{\partial p_d}{\partial \sigma} \quad (10)$$

同理 $\Phi = v$ 时有类似源项;当 $\Phi = w$ 时

$$S_\Phi = -J \frac{\partial p_d}{\partial \sigma} \quad (11)$$

2 控制方程离散求解

基于有限体积离散控制方程(7)(8),新坐标系(ξ, η, σ)下选用 U, V, w, h, ε 作为独立计算变量,采用非交错网格布置,所有变量布置于同一节点上^[3].

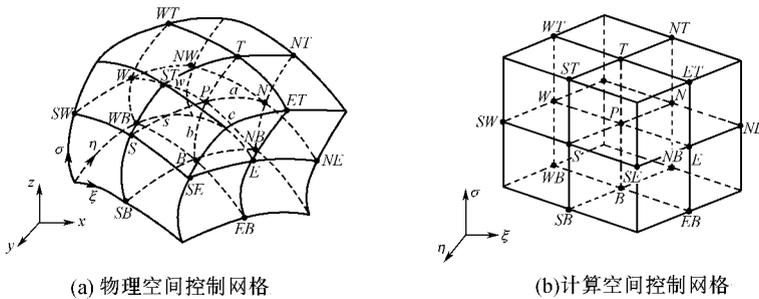


图 2 P 节点控制体积

Fig.2 Typical control volume for node P

节点 P 的控制体积 $\Delta\xi\Delta\eta\Delta\sigma$,见图 2.令 $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ 统一形式的控制方程离散为

$$a_P \Phi_P = \sum a_{nb} \Phi_{nb} + b_P + a_P^* \Phi_P^0 + S_\Phi \quad (12)$$

$$a_I = D_i A(|P_i|) + \max(-F_i, 0) \quad (I = E, W, N, S, T, B; i = e, w, n, s, t, b)$$

$$F_e = (\rho HU)_e \quad D_e = (\alpha G_\Phi H / J)_e / \delta\xi_e \quad F_w = (\rho HU)_w \quad D_w = (\alpha G_\Phi H / J)_w / \delta\xi_w$$

$$F_n = (\rho HV)_n \quad D_n = (\gamma G_\Phi H / J)_n / \delta\eta_n \quad F_s = (\rho HV)_s \quad D_s = (\gamma G_\Phi H / J)_s / \delta\eta_s$$

$$F_t = (\rho HW)_t J / \Delta\sigma \quad D_t = (q_{33} G_\Phi)_t \mathcal{A} / (JH\Delta\sigma\delta\sigma_t)$$

$$F_b = (\rho HW)_b J / \Delta\sigma \quad D_b = (q_{33} G_\Phi)_b \mathcal{A} / (JH\Delta\sigma\delta\sigma_b)$$

$$a_P = \sum a_{nb} + a_P^* \quad a_P^* = \rho HJ / \Delta t \quad P_i = F_i / D_i$$

$$A(|P|) = \max[0, (1 - 0.1|P|)^2]$$

$$b_P = \left[\frac{G_\Phi H}{J} (-\beta\Phi_\eta + \frac{q_{13}}{H}\Phi_\sigma) \right] \Big|_w^e + \left[\frac{G_\Phi H}{J} (-\beta\Phi_\xi + \frac{q_{23}}{H}\Phi_\sigma) \right] \Big|_s^n + \left[\frac{G_\Phi}{J} (q_{31}\Phi_\xi + q_{32}\Phi_\eta) \right] \Big|_b^t / \Delta\sigma$$

这样 U, V, w 离散方程为

$$a_p U_p = \sum a_{nb} U_{nb} + b_U + a_p^* U_p^0 + b_{Curv} - \rho g H (\alpha \zeta_\xi - \beta \zeta_\eta) - H (\alpha (p_d)_\xi - \beta (p_d)_\eta) + (\alpha z_\xi - \beta z_\eta) (p_d)_\sigma$$

$$b_U = b_{uy_\eta} - b_{vx_\eta} \quad b_{Curv} = \sum a_i (U_i^c - U_i) \quad U_i^c = u_{iy_\eta} - v_{ix_\eta} \quad (i = E, W, \dots) \quad (13)$$

同理 V_p 有类似表达式, w 方向有

$$a_p w_p = \sum a_{nb} w_{nb} + b_w + a_p^* w_p^0 - \mathcal{K}(p_d)_\sigma \quad (14)$$

压力-速度耦合问题由 SIMPLEC 求解^[2], 流速

$$U = U^* + U' \quad p_d = p_d^* + p'_d \quad (15)$$

忽略流速修正表达式中的交叉压力修正项后, 流速修正为

$$U'_p = -\alpha H (p'_d)_\xi \mathcal{A} (a_p - \sum a_{nb})$$

$$V'_p = -\gamma H (p'_d)_\eta \mathcal{A} (a_p - \sum a_{nb}) \quad W'_p = -\Omega (p'_d)_\sigma \mathcal{A} (a_p - \sum a_{nb}) \quad (16)$$

$$\Omega = \frac{1}{JH_p} (J^2 + \alpha z_\xi^2 - 2\beta z_\xi z_\eta + \gamma z_\eta^2)$$

将式(16)及(15)代入方程(7), 并离散得动水压力修正方程

$$a_p (p'_d)_p = \sum a_{nb} (p'_d)_{nb} + B \quad (17)$$

这样, 由计算得到的动水压力场 p_d^* 作为估计值, 代入离散方程(13)及(14)后求得流速估计值, 由动水压力修正方程计算动水压力修正值 p'_d , 代入(16)及(17)式, 从而获得经修正过的动水压力和速度。

3 动量插值

由于使用非交错同位网格, 控制体交界面上的对流通量将依据交界面 U_e, V_n, W_t 插值计算, 为避免波动压力场, 采用动量插值计算方法^[2], 由方程(13)及(14)可知

$$U_e = (\bar{U})_e + \left(\frac{a_p^*}{a_p}\right)_e U_e - \left(\frac{a_p^*}{a_p} U_p\right)_e - \left(\frac{\alpha H}{a_p}\right)_e (P_\xi)_e + \left(\frac{\alpha H P_\xi}{a_p}\right)_e \quad (18)$$

式中 $(\bar{U})_e$ 为 U_p, U_E 在交界面上的线性插值, 同理有 V_n 插值表达式。由式(6)可得竖直方向交界面流速插值公式:

$$W_t = (\bar{W})_t + \left(\frac{a_p^*}{a_p}\right)_t W_t - \left(\frac{a_p^*}{a_p} W_p\right)_t - \left(\frac{\Omega}{a_p}\right)_t (P_\sigma)_t + \left(\frac{\Omega P_\sigma}{a_p}\right)_t \quad (19)$$

4 自由面水位确定

考虑水流运动模拟满足二、三维质量和动量守恒, 二维水深平均水流运动数值计算 SIMPLER 法中水位方程为

$$a_p \zeta_p = \sum a_{nb} \zeta_{nb} + a_p^* \zeta_p^0 + b \quad (20)$$

$$a_p = \sum a_{nb} + a_p^* \quad a_p^* = \frac{\rho J \Delta \xi \Delta \eta}{\Delta t} \quad a_E = \frac{\rho H d_e \Delta \eta}{\delta \xi_e} \quad a_N = \frac{\rho H d_n \Delta \xi}{\delta \eta_n}$$

同理 a_w, a_s 有类似表达式, b 为源项。由此计算新水位 ζ^{n+1} 。

5 计算实例

S形弯道由2个90°弯相连(见图3), 其水动力学特性见文献[5]等水槽试验。本文选用其中一组试验资料: $B = 2.34\text{m}$, 下游水位 $H = 0.115\text{m}$, 上游流速 $U_0 = 0.366\text{m/s}$ 。计算网格节点 $113 \times 24 \times 11$, 垂向共分10层, 计算时步长 $\Delta t = 0.1\text{s}$ 。在 P III 500 计算机上共进行1200时步, 最大质量源为 6.5×10^{-4} , 已达稳定状态。计算结果见图4、5、6, 可见, 三维计算结果和实测资料基本上吻合, 反映出三维弯道水流的运动特性, 揭示出弯道水流的底

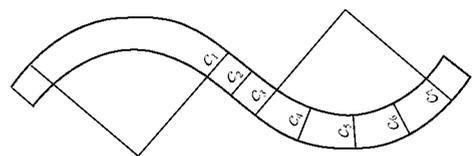


图3 S形弯道示意图
Fig.3 "S" type meandering channel

底

部流向和表层流向交错的重要特征,底层水流由凹岸指向凸岸,表层水流由凸岸指向凹岸,这是二维模型所不能反映的,也是弯道产生泥沙横向输移的重要动力。三维水流泥沙数值模型在模拟弯道水流时明显地优于二维模型。图 6 表明断面各点纵横向流速沿水深分布的计算值和水槽试验的实测值以及文献 [4] 计算值基本吻合。

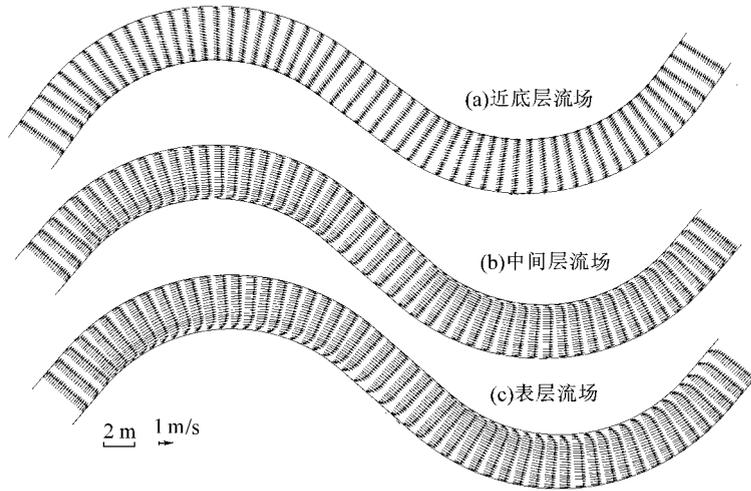


图 4 S形弯道分层流场

Fig.4 Velocity vector fields in "S" type channel

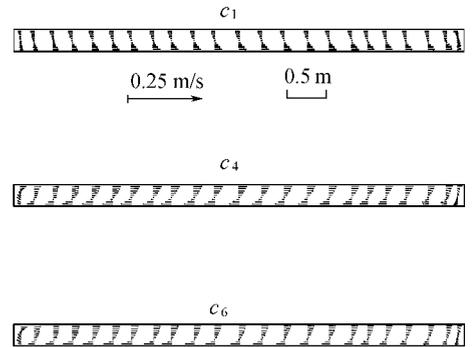


图 5 横断面环流流态

Fig.5 Circulation flow in cross section

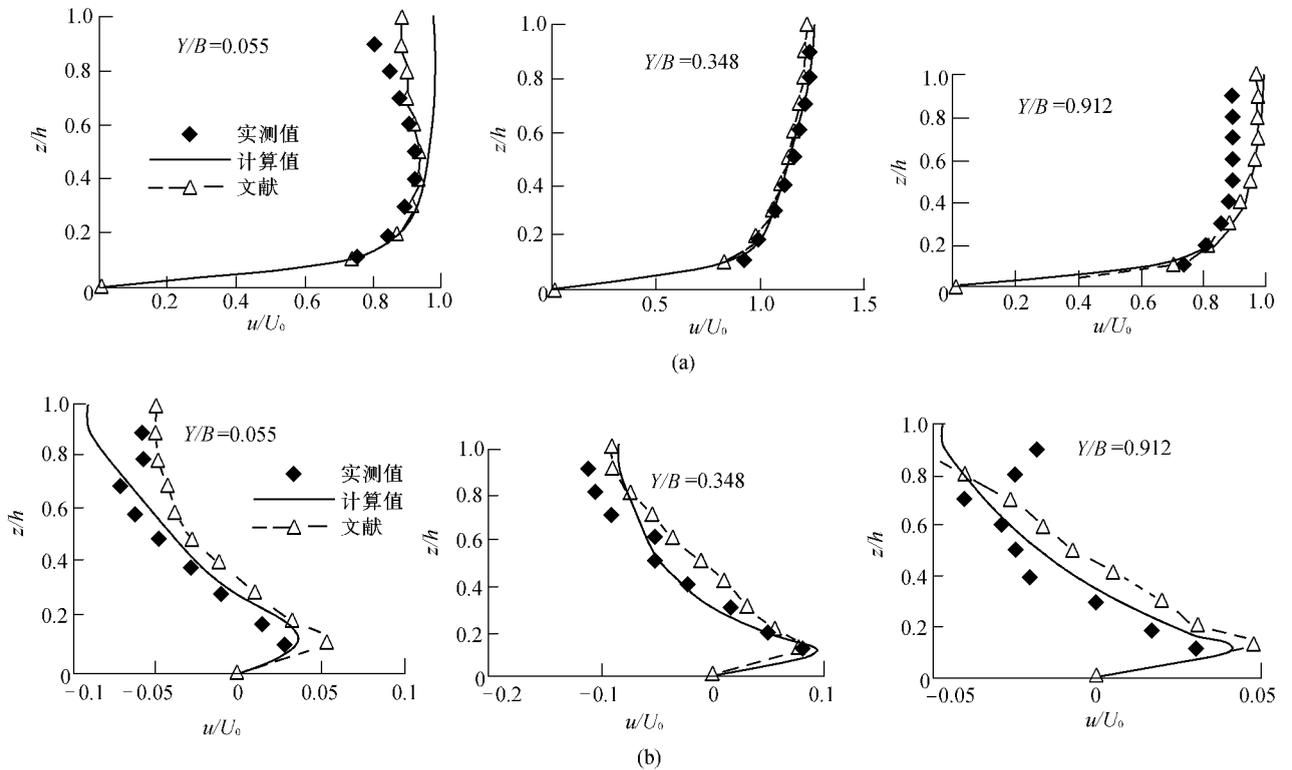


图 6 C6 断面各点纵、横向流速沿水深分布的计算值和实测值

Fig.6 Calculated and measured longitudinal and lateral velocity distribution

参考文献：

[1] 金忠青. N-S 方程数值解及紊流模型 [M]. 南京: 河海大学出版社, 1996. 50 ~ 55.
 [2] 夏云峰. 感潮河道三维水流泥沙数值模型研究与应用 [D]. 南京: 河海大学, 2002.

- [3] Xu H ,Chang C. Study of the effect of the non-orthogonality for non-staggered grids[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids 1998 28 :1265 ~ 1280.
- [4] Ye Jian ,McCorquodall J A. A three-dimensional hydrodynamic model in curvilinear co-ordinates with collocated grid[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids ,1998 28 :1109 ~ 1134.
- [5] Chang Y C. Lateral mixing in meandering channels[D]. Iowa City :Univ of Iowa ,1970.

Non-orthogonal curvilinear collocated grid based 3-D hydrodynamic model

XIA Yun-feng , XUE Hong-chao

(College of Traffic and Ocean Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China)

Abstract : A 3-D curvilinear collocated grid hydrodynamic model is developed based on the 2-D model. In the horizontal x-y plane , a boundary-fitting curvilinear coordinate system is adopted ; in the vertical direction , a σ -coordinate transformation is used to represent the free surface and bed topography. Then the total pressure is subdivided into the hydrostatic and residual hydrodynamic components , and the K- ϵ turbulent flow model , non-staggered curvilinear grid , momentum interpolation , and SIMPLEC algorithm are used to solve the basic equations. Finally , a 3-D flow field in an " S " type meandering channel is simulated by the present method , and the results are in good agreement with measured data.

Key words : coordinate transformation ; momentum interpolation ; free surface ; 3-D flow numerical model

2003年《水资源保护》征订启事

《水资源保护》是由环境水利研究会与河海大学共同主办的 ,以技术性为主 兼顾学术性和管理性的技术性期刊。本刊 1985 年创刊 ,是全国惟一的水资源保护方面的专业性期刊。国内外公开发行。其主要任务是探讨我国水资源保护的技术政策、科学技术、宏观管理及实践中的重大问题 ;及时反映国内外在水资源保护领域中的新颖实用技术和科技信息 ;推广全国各地在水资源保护工作中的成果和经验 ;报导有关国内外学术会议、技术交流等消息动态。

主要刊登内容 :与水资源保护有关的科技政策、综合述评、研究探讨、工程技术及措施、成果推广及经验交流 ,专题讲座、国外动态、书刊评介、科技简讯 ,水资源管理、评价、监测、优化配置 ,节水技术 ,水环境污染控制以及水环境监测仪器等。

主要读者对象 :全国从事水资源保护工作的水利、环保及相关领域的工作者 ,有关工程技术、科研人员、管理干部以及大专院校的师生。

《水资源保护》已于 2003 年交邮局发行。邮发代号 :28 - 298 ,双月刊 ,6 元/期 ,全年 36 元 ,每逢单月 30 日出版。欲订购者 ,请径向当地邮局订购。若无法从邮局订阅 ,亦可与编辑部联系索取征订单。

编辑部地址 :210098 南京市西康路 1 号 河海大学

联系电话 (025) 8786642 联系人 :王海