扩展 Saint-Venant 方程组在河网水力计算中的应用

张静怡[1],徐小明[2],王如云[3]

(1.河海大学水资源环境学院,江苏 南京 210098;2.河海大学理学院,江苏 南京 210098;
3.河海大学交通与海洋工程学院,江苏 南京 210098)

摘要:对扩展形式的 Saint-Venant 方程组建立了 Preissmann 加权四点隐式格式,而离散所得的非线性代数方程组则用收敛速度较快的 Newton-Raphson 迭代法进行求解,并将该解法成功地用于上海市具有数百条河道的大型河网水力数值计算中,模拟了降雨及闸门在各种运行方式下的水力问题,取得了令人满意的结果.

关键词:扩展 Saint-Venant 方程组;河网;数值模拟

中图分类号:TV131.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-1980(2002)06-0104-04

在众多的河网非恒定流的水力数值模拟方法中,一般都是以通常形式 Saint-Venant 方程组为基础,进行离散,并求其数值解[1~4].然而,当讨论的实际问题需要考虑侧流、河湾、河道断面突扩或收缩引起的附加阻力坡降、非牛顿流体引起的附加阻力坡降及风对水面的阻力等因素的影响时,通常形式 Saint-Venant 方程组已不再适用,此时应引入扩展形式的 Saint-Venant 方程组.本文对单一河道用收敛速度较快的 Newton-Raphson 迭代法直接求解由扩展形式的 Saint-Venant 方程组按 Preissmann 加权四点隐式进行离散所得的差分方程组,而对环状河网用节点处支流流量的松弛迭代法[5]将其归结为一系列的单一河道进行求解.本文的方法已成功地用于上海市河网水力、水质数学模型研究中.

1 扩展形式的守恒型 Saint-Venant 方程组及其差分离散

1.1 扩展形式的守恒型 Saint-Venant 方程组

扩展形式的守恒型 Saint-Venant 方程组包括质量守恒方程

$$\frac{\partial S_{co}(A+A_o)}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}-q=0 \tag{1}$$

及动量守恒方程

$$\frac{\partial(S_m Q)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta Q^2}{A}\right)+gA\left(\frac{\partial h}{\partial x}+S_f+S_e+S_i\right)+L+W_f B=0 \tag{2}$$

式中:Q——流量;h——水位;A——有效过水断面面积;A_o——蓄水断面面积;S_{co},S_m——河道蜿蜒系数,它们是水位 h 的函数;x——沿主流向的纵向距离;t——时间;q——侧向入流或出流(入流为正,出流为负);β——动量校正系数;g——重力加速度;S_f——河道的阻力坡降;S_e——河道突扩或收缩引起的坡降;S_i——非牛顿流体引起的附加阻力坡降;B——有效过水断面的水面宽;W_f——风对水面的阻力.

W_f 采用如下公式进行计算:

$$W_f=C_w V_{rw}\,|\,V_{rw}\,| \tag{3}$$

式中:C_w——风阻力系数($1\times10^{-6}\leqslant C_w\leqslant 3\times10^{-6}$);$V_{rw}$——相对风速($V_{rw}=V\pm V_w\cos\omega$),$V=Q/A$,$V_w$ 为风速,ω 为风向与 x 正向的夹角.

L 是侧向流的动量,有下列几种形式:(a) 侧向入流,$L=qv_x$,v_x 是侧向入流沿河道流向 x 的速度分量;(b) 侧向出流,$L=-qQ/A$;(c) 侧向渗流,$L=-0.5qQ/A$.

收稿日期:2002-01-14

基金项目:国家自然科学基金资助项目(5997904)

作者简介:张静怡(1966—),女,浙江诸暨人,硕士,讲师,主要从事水文水资源及水动力研究.

1.2　方程组的离散

方程组离散采用 Preissmann 加权四点隐式有限差分格式.函数 ψ 及其对时间导数和对空间导数的离散公式是

$$\psi = \theta \frac{\psi_j^{n+1} + \psi_{j+1}^{n+1}}{2} + (1-\theta)\frac{\psi_j^n + \psi_{j+1}^n}{2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\psi_j^{n+1} + \psi_{j+1}^{n+1} - \psi_j^n - \psi_{j+1}^n}{2\Delta t_n} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \theta \frac{\psi_{j+1}^{n+1} - \psi_j^{n+1}}{\Delta x_j} + (1-\theta)\frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{\Delta x_j} \tag{6}$$

将上述三式用于(1)式和(2)式,可得到它们的 Preissmann 加权四点隐式有限差分格式分别为

$$\theta \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{\Delta x_j} - \theta q_j^{n+1} + (1-\theta)\frac{Q_{j+1}^n + Q_j^n}{\Delta x_j} - (1-\theta) q_j^n + \frac{S_{co_j}^{n+1}(A+A_0)_j^{n+1} + S_{co_{j+1}}^{n+1}(A+A_o)_{j+1}^{n+1} - S_{co_j}^n(A+A_o)_j^n - S_{co_{j+1}}^n(A+A_o)_{j+1}^n}{2\Delta t_n} = 0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\frac{(S_{m_j}Q_j)^{n+1} + (S_{m_{j+1}}Q_{j+1})^{n+1} - (S_{m_j}Q_j)^n - (S_{m_{j+1}}Q_{j+1})^n}{2\Delta t_n} + \\ &\theta\left[\frac{(\beta Q^2/A)_{j+1}^{n+1} - (\beta Q^2/A)_j^{n+1}}{\Delta x_j} + g\overline{A}^{n+1}\left(\frac{h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}}{\Delta x_j} + \overline{S}_f^{n+1} + \overline{S}_e^{n+1} + \overline{S}_i^{n+1}\right) + L_j^{n+1} + (W_f\overline{B})_j^{n+1}\right] + \\ &(1-\theta)\left[\frac{(\beta Q^2/A)_{j+1}^n - (\beta Q^2/A)_j^n}{\Delta x_j} + g\overline{A}^n\left(\frac{h_{j+1}^n - h_j^n}{\Delta x_j} + \overline{S}_f^n + \overline{S}_e^n + \overline{S}_i^n\right) + L_j^n + (W_f\overline{B})_j^n\right] = 0\end{aligned} \tag{8}$$

式中:$\overline{A} = \frac{A_j + A_{j+1}}{2}$;$\overline{S}_f = \frac{n_j^2\overline{Q}\mid\overline{Q}\mid}{\mu^2\overline{A}^2\overline{R}^{4/3}} = \frac{\overline{Q}\mid\overline{Q}\mid}{\overline{K}^2}$;$\overline{Q} = \frac{Q_j + Q_{j+1}}{2}$;$\overline{R} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}}$ 或 $\overline{R} = \frac{\overline{A}}{\overline{P}}$;$\overline{B} = \frac{B_j + B_{j+1}}{2}$;$\overline{K} = \frac{K_j + K_{j+1}}{2}$;$\overline{P} = \frac{P_j + P_{j+1}}{2}$,$P_j$ 为湿周.

θ 为权系数,由线性化稳定性分析知,稳定性条件为 $\theta \geqslant 0.5$,一般适当放宽,取 $\theta = 0.6$[6],$j = 1,2,\cdots,N-1$,其中 N 为某一河道总的断面数.第 n 层为由初始条件给出(当 $n = 0$)或是已计算出的值(当 $n > 0$),则(7),(8)式是关于 $h_j^{n+1}, Q_j^{n+1}(j = 1,2,\cdots,N-1)$ 的非线性代数方程组,共有 $2N$ 个未知量,$2N-2$ 个方程.若加上给定的上、下游边界条件所对应的两个方程,则共有 $2N$ 个方程,从而形成了第 $n+1$ 时刻关于单一河道 N 个断面的水位、流量的 $2N$ 元非线性代数方程组.

2　离散方程的求解

由(7),(8)式得到的是 $2N$ 元非线性代数方程组,利用收敛速度较快的 Newton-Raphson 迭代法进行求解.在河网水力数值计算中 Newton-Raphson 迭代法收敛性的证明可见文献[7].

令

$$\begin{aligned}&F_{C_j}(h_j^{n+1}, Q_j^{n+1}, h_{j+1}^{n+1}, Q_{j+1}^{n+1}) = \\ &\frac{\Delta x_j}{2\Delta t_n}\left[S_{co_j}^{n+1}(A+A_o)_j^{n+1} + S_{co_{j+1}}^{n+1}(A+A_o)_{j+1}^{n+1} - S_{co_j}^n(A+A_o)_j^n - S_{co_{j+1}}^n(A+A_o)_{j+1}^n\right] + \\ &\theta\left[Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}\right] + (1-\theta)\left[Q_{j+1}^n - Q_j^n\right] - \Delta x_j\left[\theta q_j^{n+1} + (1-\theta) q_j^n\right] = 0\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&F_{M_j}(h_j^{n+1}, Q_j^{n+1}, h_{j+1}^{n+1}, Q_{j+1}^{n+1}) = \\ &\frac{\Delta x_j}{2\Delta t_n}\left[(S_{m_j}Q_j)^{n+1} + (S_{m_{j+1}}Q_{j+1})^{n+1} - (S_{m_j}Q_j)^n - (S_{m_{j+1}}Q_{j+1})^n\right] + \\ &\theta\left[(\beta Q^2/A)_{j+1}^{n+1} - (\beta Q^2/A)_j^{n+1}\right] + (1-\theta)\left[(\beta Q^2/A)_{j+1}^n - (\beta Q^2/A)_j^n\right] + \\ &\theta g\overline{A}^{n+1}\left[(h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}) + \Delta x_j(\overline{S}_f^{n+1} + \overline{S}_e^{n+1} + \overline{S}_i^{n+1})_j\right] + \\ &(1-\theta) g\overline{A}^n\left[(h_{j+1}^n - h_j^n) + \Delta x_j(\overline{S}_f^n + \overline{S}_e^n + \overline{S}_i^n)_j\right] + \\ &\Delta x_j\theta\left[L_j^{n+1} + (W_f\overline{B})_j^{n+1}\right] + \Delta x_j(1-\theta)\left[L_j^n + (W_f\overline{B})_j^n\right] = 0\end{aligned} \tag{10}$$

从而可得 Newton-Raphson 迭代法的第 k 步形为

$$\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(k)} \tag{11}$$

的 Newton 方程组.(11)式为 $2N$ 元线性代数方程组,其中 $\boldsymbol{A}^{(k)}$ 为 $2N$ 阶五对角阵,且每行最多只有 4 个非零元素,$\boldsymbol{b}^{(k)}$ 为 $2N$ 维列向量.该线性代数方程组可用压缩存贮形式的 Gauss 列主元消去法[8]进行求解.此方法具有存贮单元少、舍入误差小且数值计算稳定的优点.

3 环状河网的松弛迭代方法

Saint-Venant 方程组为描述单一河道非恒定流的数学模型,无法直接用于环状河网.对于环状河网中非恒定流的数值计算问题通常有两种方法将其归结为单一河道的问题,其一为节点水位法[2],其二为节点处支流流量的松弛迭代方法[5].

节点处支流流量的松弛迭代法是对河网的干流及各级支流河道逐一进行求解.各河道的支流在每一汇流点处的流量视作侧流,先给出其估计值,再用如下的松弛迭代方法进行校正.

$$q_{ki}^{\mathrm{new}} = \alpha q_{ki}^{\mathrm{c}} + (1-\alpha) q_{ki}^{\mathrm{p}} \tag{12}$$

其中:q_{ki}^{p}——支流流量前一步的迭代值;q_{ki}^{c}——支流流量前一步的计算值;q_{ki}^{new}——支流流量新的迭代值;α——权重因子$(0<\alpha<1)$;k——支流河道号;i——第 k 条河道下游断面号.收敛条件是 $|q_{ki}^{\mathrm{c}} - q_{ki}^{\mathrm{p}}| < \varepsilon_Q$.

用节点处支流流量的松弛迭代法求解河网非恒定流,所形成的线性代数方程组的系数矩阵具有五对角阵等优良特性,这对线性代数方程组的数值解是极为有益的.

4 算 例

以 1999 年 7 月 28 日~8 月 31 日上海市水务局进行的苏州河调水资料(包括降雨资料、泵站排水资料和部分闸门的运行资料)为例.

4.1 水文资料

所用的资料是 1999 年 7 月 28 日~8 月 31 日的同步实测水位和流量资料.边界水位测点是淀峰站、淀浦西闸、金泽站、三和站、赵屯站、枫围站、秋移庙站和吴淞口站.验证资料为黄渡站、北新泾的实测水位和流量以及纪王港、封浜、新槎浦的流量.

1999 年 7 月 28 日~8 月 31 日上海地区有雨,在计算过程中应用了产汇流模型.所用雨量资料是相关片的同步雨量资料.在调水过程中有 17 个排水泵站参与运行,泵站的排水量均纳入计算.

4.2 验证范围

根据水位资料,验证的范围为淀南片、淀北片、蕴南片、嘉宝北片和青松大控制片 5 个片以及黄浦江、苏州河等主要干、支流.

4.3 验证条件

a. 苏州河闸及其相关支流的闸按实际操作记录设定;

b. 南片、北竹港入淀浦河处的闸门关闭,其余河道入黄浦江的闸开启;

c. 各片的闸门根据片内水位变化而开关.

黄浦江和苏州河的糙率由潮流向和潮流量在 0.018~0.028 之间自动调节,其余各河道的糙率取 0.025.

4.4 验证结果

部分测点处计算与观测水位过程和流量过程的比较见图 1.由图 1 可见,计算与观测的水位过程和流量过程均较吻合.

5 结 论

以扩展形式的 Saint-Venant 方程组为基础建立的河网非恒定流的水力数学模型,由于考虑了侧流、河湾、河道断面突扩或收缩引起的附加阻力坡降、非牛顿流体引起的附加阻力坡降及风对水面的阻力等因素的影响,因而更能准确地模拟原型,从而具有更广的适用范围.

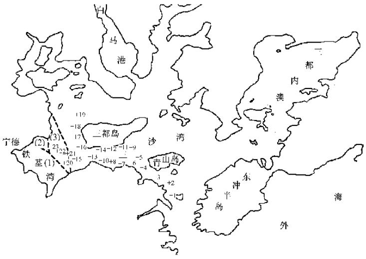

图 1　计算与实测水位、流量过程的比较

Fig.1　Comparison of computed water level and flow with observed data

参考文献:

[1] 张二骏,张东生,李挺.河网非恒定流三级联合解法[J].华东水利学院学报,1982,10(1):1~13.

[2] 吴寿红.河网非恒定流四级解算法[J].水利学报,1985(8):42~50.

[3] Feng Ping, Rui Xiaofang. Method of flood routing for multibranch rivers[J]. J Hydr Engrg,1999,125(3):271~276.

[4] 李义天.河网非恒定流隐式方程组的汊点分组解法[J].水利学报,1997(3):49~57.

[5] 徐小明.大型河网水力水质数值模拟方法[D].南京 河海大学,2001.

[6] Fread D L. 'Flow routing', hand book of hydrology[M]. In:Maidment D R, eds. New York:McGraw-Hill,1992.10.1~10.36.

[7] 徐小明,汪德□.河网水力数值模拟中 Newton-Raphson 法收敛性的证明[J].水动力学研究与进展,2001(3):319~324.

[8] 徐小明,汪德□.大型线性方程组解法的探讨[J].河海大学学报:(自然科学版),2001,29(2):20~24.

Application of extended Saint-Venant equations to hydraulic simulation of river networks

ZHANG Jing-yi[1], XU Xiao-ming[2], WANG Ru-yun[3]

(1. *College of Water Resources and Environment*, *Hohai Univ.*, *Nanjing* 210098, *China*;

2. *College of Sciences*, *Hohai Univ.*, *Nanjing* 210098, *China*;

3. *College of Traffic and Ocean Engineering*, *Hohai Univ.*, *Nanjing* 210098, *China*)

Abstract: A preissmann weighted implicit four-point format is developed for the extended Saint-Venant equations. The rapidly convergent Newton-Raphson iteration method is employed to solve the nonlinear equations obtained by discretization of the Saint-Venant equations. The solution is successfully applied to the simulation of the large-scale river network with hundreds of rivers in Shanghai. The simulated results under precipitation and different operating conditions of water gates show that the present method is effective.

Key words: extended Saint-Venant equation; river network; numerical simulation