

双重网格的 Lattice Boltzmann 方法

王兴勇¹, 索丽生¹, 程永光², 刘德有¹

(1. 河海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098 ; 2. 武汉大学水利水电学院, 湖北 武汉 430072)

摘要 : 针对均匀网格的 Lattice Boltzmann 方法(LBM)计算效率较低的不足 , 引入有限差分方法(FDM)中双重网格算法的基本思想 , 结合 LBM 在连续流场上变量也连续分布的特点 , 推导出双重网格的 LBM . 这种算法充分利用粗、细两种网格各自不同的优点 , 加快了收敛速度 , 提高了流场的计算效率 . 通过模拟二维 Poiseuille 流动和后台阶流动两个算例 , 证明双重网格算法的计算时间明显地少于均匀网格算法的计算时间 , 计算结果正确可信 .

关键词 : Lattice Boltzmann 方法(LBM) ; 流场计算 ; 双重网格 ; 计算效率
中图分类号 : TV13 ; O24 **文献标识码** : A **文章编号** : 1000-198X(2003)01-0005-06

20 世纪 80 年代中期以来 , Lattice Boltzmann 方法(LBM)在理论和应用方面得到了长足的发展 . 理论的增强和应用领域的拓宽使 LBM 成为传统计算流体动力学(CFD)方法的有力竞争者^[1] . LBM 从分子运动论和统计力学的观点和理论出发 , 建立微观粒子的运动模型 , 用迁移和碰撞两个相对简单的过程再现流体的宏观特性 , 以二阶精度模拟 N-S 方程 . 在 Boltzmann 方程的基础上 , LBM 引入 Chapman-Enskog 展开和 Taylor 级数展开 , 用 Bhatnagar-Gross-Krook(BGK)格式替代碰撞过程 , 得到常用的 LBKG 方程^[2] :

$$f_{\alpha}(x + e_{\alpha}\delta t, t + \delta t) - f_{\alpha}(x, t) = -\frac{1}{\tau}(f_{\alpha}(x, t) - f_{\alpha}^{eq}(x, t)) \quad (\alpha = 0, 1, \dots, b) \quad (1)$$

式中 : α ——粒子运动的第 α 个方向 ; $f_{\alpha}(x, t)$ ——节点 (x, t) 处 α 方向上的粒子分布函数 ; f_{α}^{eq} —— α 方向上的平衡分布函数 ; e_{α} —— α 方向上的粒子运动速度 ; τ ——松弛系数 ; b ——离散速度的总数 . 此外 , LBM 以质量守恒和动量守恒为限制条件 , 得到密度 ρ 和动量 ρu 与分布函数 f_{α} 或 f_{α}^{eq} 的关系 :

$$\rho = \sum_{\alpha} f_{\alpha} = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq} \quad \rho u = \sum_{\alpha} f_{\alpha} e_{\alpha} = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq} e_{\alpha} \quad (2)$$

在常用的二维 9 点均匀网格模型 $D2Q9$ (D 表示维数 , Q 表示粒子运动方向的总数) 中 , 流场的空间剖分 $\delta x = \delta y = 1$, 时间步长 $\delta t = 1$, 波速 $Cs = \sqrt{3}/3$, 粘性系数 $\nu = (2\tau - 1)/6$, 压力 $p = Cs^2 \rho$, $e_0 = 0$, $\alpha = 1, 3, 5, 7$ 时 $e_{\alpha} = (\cos((\alpha - 1)\pi/4), \sin((\alpha - 1)\pi/4))$; $\alpha = 2, 4, 6, 8$ 时 $e_{\alpha} = \sqrt{2}(\cos((\alpha - 1)\pi/4), \sin((\alpha - 1)\pi/4))$. 平衡分布函数为

$$f_{\alpha}^{eq} = \rho \omega_{\alpha} [1 + 3(e_{\alpha} \cdot u) + \frac{9}{2}(e_{\alpha} \cdot u)^2 - \frac{3}{2}u^2] \quad (3)$$

式中

$$\omega_0 = \frac{4}{9} \quad \omega_1 = \omega_3 = \omega_5 = \omega_7 = \frac{1}{9} \quad \omega_2 = \omega_4 = \omega_6 = \omega_8 = \frac{1}{36}$$

与其他计算方法如有限差分法(FDM)、有限元法(FEM)等相比 , LBM 具有较多的优点 : 算法简单 , 用迁移和碰撞两个相对简单的过程就能够再现复杂的宏观现象 , 编程容易 , 并且压力可以直接求解 ; 随着边界处理方法的不断完善 , 能够模拟复杂的边界条件 , 如多连通边界和多孔介质边界等 ; 计算的同步性使其在并行计算方面 also 具有很大的优势 . 正是因为这些特征 , LBM 在许多领域取得了丰硕的成果^[3~6] , 得到人们的认可和赞同 . 另一方面 , LBM 的理论和应用还需要不断地改进和完善 , 其中 LBM 的计算效率一直是人们关注的问题之一 . 一些学者^[7~9]将 LBM 与传统的 FDM、FEM 及谱方法进行比较 , 发现在计算精度方面 , LBM 能够达到二

阶精度,但在计算效率方面,却不甚理想.其原因在于 LBM 松弛系数的选择受到其本身稳定性的限制,需要迭代的次数多,运算量大,导致收敛速度慢. Noble 等^[9]详细地比较了 LBM 和 FDM 对 8 边形圆柱绕流问题的模拟.他们指出 LBM 需要迭代的次数与网格的节点数成线性关系,在充分发挥 LBM 并行计算优势的前提下, LBM 的计算效率与 FDM 相当. Kandhai 等^[7]用 LBM 和 FEM 模拟了三维 SMRX 静止混合器的过流问题,得出 LBM 计算迭代的次数约为 $N^{1.7}$ (N 为计算网格总数). He 等^[10]用 $64 \times 64 \times 256$ 网格计算三维 Rayleigh-Taylor 不稳定问题,在 16 个处理器且每个处理器拥有 256 M 内存的并行机——ASCI Blue Mountain 上运算,所用时间为 8 CPU 小时;如果网格剖分为 $128 \times 128 \times 512$,在 32 个处理器的并行机上运算,所需时间为 80 CPU 小时.由上可以看出,对于复杂的流场,网格剖分越细,需要迭代的次数越多,即使拥有功率强大的计算工具,每次计算所花费的时间也不可小视.因此提高计算效率是推动 LBM 实用化的一个重要进展.

针对上述不足,本文引入了 FDM 中双重网格算法的基本思想,结合 LBM 自身的特点,推导出双重网格的 LBM.这种算法使 LBM 在两种网格上演进,利用粗网格和细网格各自不同的收敛特性,加快 LBM 的收敛速度,提高计算效率.最后,利用这种算法模拟了二维 Poiseuille 流动和后台阶流动两个算例,通过与均匀网格的 LBM 相比较,证明双重网格的 LBM 具有更高的计算效率.

1 双重网格算法的基本思想

双重网格算法最早用来求解椭圆形有限差分方程^[11].其网格布置如图 1, H 表示粗网格, h 表示细网格.先在细网格上计算得到一个初步结果,然后转移到粗网格,在粗网格上求出比较精确的值后,再转移到细网格上进行计算.这样反复进行,使误差不断减小,迭代过程得以加速.粗、细网格的数据连接通过插值(即加权转移)实现.具体的计算过程如下:

(a) 假定初始值 $\mathbf{u}_h^{(n)}$ 在细网格上对方程 $L_h \mathbf{u}_h = f_h$ 作 γ 次迭代,得到近似解 $\bar{\mathbf{u}}_h^{(n)}$;

(b) 计算细网格的亏损量:

$$d_h^{(n)} = f_h - L_h \bar{\mathbf{u}}_h^{(n)}$$

(c) 由细网格向粗网格转移亏损量(其中 I_h^H 称为完全加权转移算子):

$$d_H^{(n)} = I_h^H d_h^{(n)}$$

(d) 在粗网格上求解方程:

$$L_H \mathbf{v}_H^{(n)} = d_H^{(n)}$$

得到比较精确的解 $\mathbf{v}_H^{(n)}$;

(e) 由粗网格向细网格转移修正量(其中 I_H^h 称为插值算子):

$$\mathbf{v}_h^{(n)} = I_H^h \mathbf{v}_H^{(n)}$$

(f) 计算细网格上的修正量:

$$\hat{\mathbf{u}}_h^{(n)} = \bar{\mathbf{u}}_h^{(n)} + \mathbf{v}_h^{(n)}$$

再以 $\hat{\mathbf{u}}_h^{(n)}$ 为初值,重复(a)~(f)步骤,直到收敛.整个过程可以用图 2 表示.

由于粗、细网格之间的数据连接是通过插值实现的,因此这种算法要求加权转移算子 I_h^H 和插值算子 I_H^h 具有较高的数值精度.结合图 1 双重网格的布置,将 I_h^H 和 I_H^h 具体表示如下:

第(c)步中 $d_H^{(n)} = I_h^H d_h^{(n)}$,即

$$\begin{aligned} d_H^{(n)}[i_H, j_H] = & \frac{1}{16} (d_h^{(n)}[i_h - 1, j_h + 1] + 2d_h^{(n)}[i_h, j_h + 1] + \\ & d_h^{(n)}[i_h + 1, j_h + 1] + 2d_h^{(n)}[i_h - 1, j_h] + 4d_h^{(n)}[i_h, j_h] + 2d_h^{(n)}[i_h + 1, j_h] + \\ & d_h^{(n)}[i_h - 1, j_h - 1] + 2d_h^{(n)}[i_h, j_h - 1] + d_h^{(n)}[i_h + 1, j_h - 1]) \end{aligned}$$

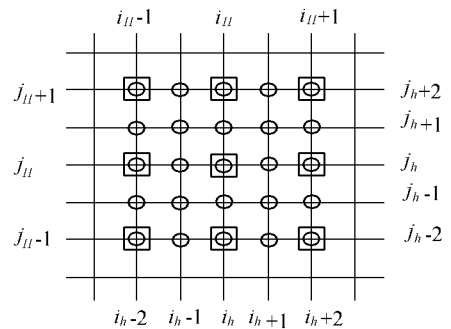


图 1 双重网格布置

Fig.1 Distribution of double meshes

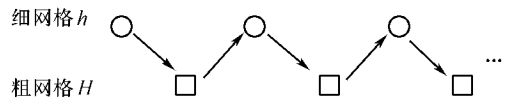


图 2 双重网格算法的计算过程

Fig.2 Computational procedure of the double-mesh algorithm

第(e)步中 $v_h^{(n)} = I_H^h v_H^{(n)}$, 即

$$v[i_h, j_h] = v[i_H, j_H]$$

$$v[i_h + 1, j_h] = \frac{1}{2}(v[i_H, j_H] + v[i_H + 1, j_H])$$

$$v[i_h, j_h + 1] = \frac{1}{2}(v[i_H, j_H] + v[i_H, j_H + 1])$$

$$v[i_h + 1, j_h + 1] = \frac{1}{4}(v[i_H, j_H] + v[i_H + 1, j_H] + v[i_H, j_H + 1] + v[i_H + 1, j_H + 1])$$

从理论上分析可知, 在细网格上的松弛过程, 使高频误差变得光滑, 但对低频误差的作用有限, 而在粗网格上, 高频误差不明显, 主要显示低频误差, 虽然在粗网格上衰减较慢, 但计算量小, 总体的迭代次数较少. 双重网格算法正是将粗网格上低频误差容易收敛和细网格上高频误差趋于光滑的两大优点结合起来, 分别发挥各自的特性, 减少计算时间, 加快收敛速度, 从而达到提高计算效率的目的.

2 双重网格的 Lattice Boltzmann 方法

Mei 等^[12]用中心差分和逆风格式离散 Boltzmann 方程, 得到有限差分 LB 方程(FDLBE), 并且用有限差分的 CFL 稳定分析方法判别 LBM 的稳定性, 说明 LBM 在理论上具有有限差分的性质. 从 LBM 的演进方程(1)可知, 分布函数 f_α 的求解过程是一个不断松弛迭代的过程, 其中的松弛系数 τ 由于稳定性的原因, 必须大于 0.5. 为了模拟具有较高 Re 的流场, $1/\tau$ 往往处于松弛系数稳定性允许范围(0, 2)的边缘, 因而收敛较慢, 必须增加迭代的次数. 另外, Cao 等^[13]指出, 对于连续的流场, 分布函数 f_α 在整个流场也是连续分布的, 因此可以利用插值的方法, 依靠已知的分布函数求出任意位置上未知的分布函数. 有了分布函数, 就可以得出流速 u 和密度 ρ 在流场上的分布. 另一方面, 在边界处理上细网格更能有效地贴近边界, 减小因边界处理带来的误差, 而边界误差是 LBM 整体误差的主要来源之一.

在计算时, 首先在整个流场上布置两种均匀的网格, 一般粗网格的步长为细网格步长的两倍, 即 $H = 2h$. LBM 在两种网格上演进, 在粗网格上, 由于空间步长 δx 较大, 能较快地传播初始条件到整个流场, 计算量小, 收敛快. 在细网格上, 利用较密的网格将高频误差分散, 使误差逐渐趋于光滑. 在具体的计算步骤上, 双重网格的 LBM 与 FDM 是有区别的. 在 LBM 中, 动力演进方程(1)为 LBM 的迭代方程, 因此在粗、细网格上转移的量仅仅是根据质量守恒和动量守恒式(2)得到的最新的流速 u 和密度 ρ , 并以流速的变化作为收敛与否的判别条件. 计算步骤如下:

(a) 根据具体问题确定初始的 u_0 和 ρ_0 ;

(b) 根据式(3)确定细网格上的 f_α 并迭代 γ 次, 得到细网格上的流速 $u_h^{(\gamma)}$ 和密度 $\rho_h^{(\gamma)}$;

(c) 将流速 $u_h^{(\gamma)}$ 和密度 $\rho_h^{(\gamma)}$ 由细网格向粗网格转移:

$$u_H = I_H^h u_h^{(\gamma)} \quad \rho_H = I_H^h \rho_h^{(\gamma)}$$

(d) 以 u_H, ρ_H 为初值, 根据式(3)确定粗网格上的 f_α 并迭代 γ 次, 得到粗网格上的流速 $u_H^{(\gamma)}$ 和密度 $\rho_H^{(\gamma)}$;

(e) 将流速 $u_H^{(\gamma)}$ 和密度 $\rho_H^{(\gamma)}$ 由粗网格向细网格转移:

$$u_h = I_H^h u_H^{(\gamma)} \quad \rho_h = I_H^h \rho_H^{(\gamma)}$$

(f) 以细网格上流速的改变量为判别条件, 若不收敛, 则以 u_h 和 ρ_h 为初始值, 重复(b)~(f).

以上算法充分利用了双重网格的优点, 又结合了 LBM 的特性, 所以在较高的精度要求下都能以很快的速度收敛, 达到提高计算效率的目的.

3 数值验证

在此将以二维 Poiseuille 流动和后台阶流动为例, 用双重网格的 LBM 与均匀网格的 LBM 相比较, 说明双重网格的 LBM 所具有的加快收敛、提高计算效率的优点. 数值验证时所用的计算工具为 Pentium III 866 MHz 主频、128 M 内存的个人微机.

3.1 二维 Poiseuille 流动

渠道宽度为 $2L$, 长度为 $4L$, 它的精确解 $u_x = u_0(1 - \frac{y^2}{L^2})$, $u_y = 0$, 其中 u_0 为最大流速. 压力差 $\frac{\partial p}{\partial x} = -G$,

$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, G = 2\rho_0\nu u_0/L^2$. 模拟时在网格的剖分上, 双重网格中的细网格与均匀网格一致, 以便于两种算法计算效率的比较. 上下游给定压力边界条件(压力转化为密度计算), 两个侧边按固壁边界条件处理, 即 $u_x = u_y = 0, Nx = 2Ny, \nu = 0.02, u_0 = 0.1, Re = u_0Ny/\nu$. 取 $Tol = 10^{-6}$, 定义达到恒定的判别条件如下(其中 $\| * \|$ 表示 L_2 范数):

$$\sum_{i,j} \|u(i,j,t+1) - u(i,j,t)\| / \sum_{i,j} \|u(i,j,t)\| \leq Tol$$

(4)

最大速度相对误差: $em = \max\{((u_x^t - u_x)^2 + (u_y^t - u_y)^2)^{1/2}/u_0\}$ 其中 u_x, u_y 为精确解.

表 1 为不同的网格剖分时均匀网格和双重网格算法分别得到的 em 和 CPU 计算时间. 图 3 为不同的网格剖分时两种算法得到的 em 比较. 从表 1 中可以看出, 随着网格的加密, 两种算法得到的 em 逐渐减小, 并且在同一种网格剖分下两种算法的 em 非常接近, 最大误差为 1.43%. 在计算时间方面, 双重网格算法的计算时间明显减少, 从时间的绝对数量可以看出, 双重网格算法的计算效率得到明显提高, 收敛速度得以加快. 但两种算法的计算时间比 (T_2/T_1) 随着网格的加密逐渐增大, 从 13.51% 增大到 32.22%. 其原因在于网格加密后, 双重网格算法在粗、细网格上的插值次数也随之增长, 增加了数据之间相互转换的时间损耗, 因此效率提高的幅度有所降低.

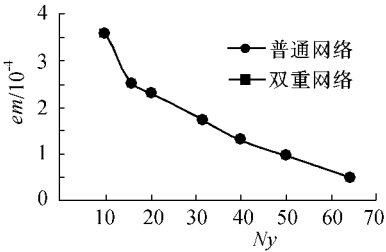


图 3 网格剖分与 em 的关系
Fig.3 Relationship between grids and em

表 1 均匀网格和双重网格算法 em 和 CPU 计算时间比较

Table 1 em and CPU computational time of uniform-mesh and double-mesh algorithms

N_x	N_y	均匀网格 $em/10^{-4}$	均匀网格 CPU 计算时间 T_1/s	双重网格 $em/10^{-4}$	双重网格 CPU 计算时间 T_2/s	T_2/T_1 /%
20	10	3.635	8	3.588	2	25.0
32	16	2.504	37	2.511	5	13.51
40	20	2.304	88	2.275	13	14.77
64	32	1.726	527	1.732	103	19.54
80	40	1.286	1234	1.293	287	23.26
100	50	0.947	2855	0.935	775	27.15
128	64	0.487	7246	0.480	2335	32.22

3.2 后台阶流动

以图 4 所示的后台阶流动为例. 进口流速成抛物线分布, 最大流速 $u_0 = 0.1$, 出口为流速自由边界, 给定密度 ρ , 其余按固壁无滑移边界处理. 宽度 $H = 2h$, 长度 $L = 3H, L_s$ 为回流区长度. 模拟时在网格的剖分上, 双重网格中的细网格与均匀网格一致. $\nu = 0.02, Nx = 3Ny, Re = u_0Ny/\nu$. 初始时流场内部 $u_x = u_y = 0$, 密度为 ρ_0 . 取 $Tol = 10^{-8}$, 流场达到恒定的判别条件同式(4). 表 2 列出了不同网格剖分时, 均匀网格和双重网格算法各自所需的 CPU 计算时间及其比较.

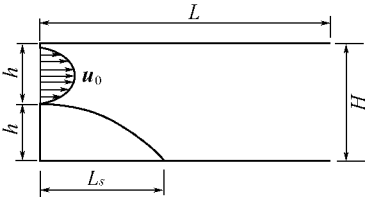


图 4 后台阶流动计算简图

Fig.4 Sketch of backward-facing step flow

表 2 均匀网格和双重网格算法 CPU 计算时间比较

Table 2 Comparison of CPU computational time between uniform-mesh and double-mesh algorithms

N_x	N_y	均匀网格 CPU 计算时间 T_1/s	双重网格 CPU 计算时间 T_2/s	T_2/T_1 /%
36	12	20	3	15.00
48	16	58	8	13.79
72	24	302	53	17.55
96	32	924	185	20.02
120	40	2099	532	25.35
144	48	4057	1210	29.82
180	60	9285	3082	33.19

从表 2 可以看出, 流场达到收敛时双重网格算法的计算时间比均匀网格明显减少, 证明双重网格算法在计算效率上得到显著的提高. 但随着网格的加密, 效率提高的幅度也逐渐降低, 两种算法的

计算时间之比从 13.79% 上升到 33.19% ,其原因与二维 Poiseulle 流动相同.

图 5、图 6 分别为均匀网格和双重网格算法 $N_y = 32$ 时的流线图 ,两种方法的计算结果非常吻合 ,并且仔细分析可以看出双重网格算法的计算结果在局部比均匀网格算法更光滑.图 7 为不同 Re 时双重网格算法计算得到的回流区长度 L_s 与文献 [14] 相应的数值解和试验值相比 ,结果比较接近.

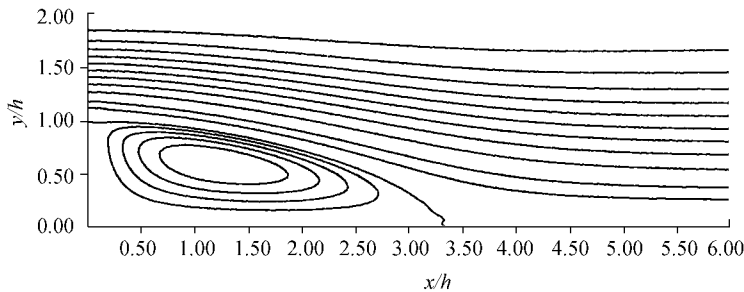


图 5 均匀网格算法 $N_y = 32$ 时的流线图

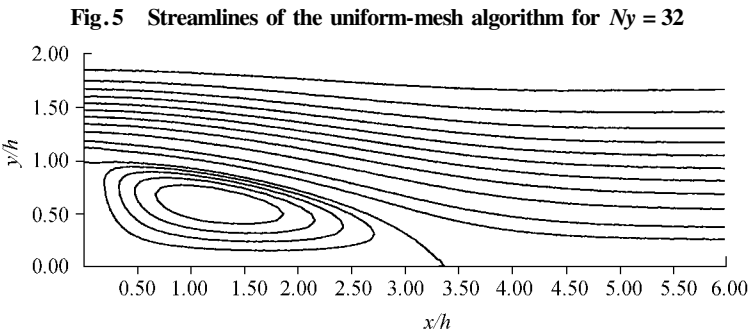


图 6 双重网格算法 $N_y = 32$ 时的流线图

Fig.6 Streamlines of the double-mesh algorithm for $N_y = 32$

4 结 语

本文针对均匀网格 LBM 计算效率较低的不足 ,引入了有限差分方法中双重网格的概念 ,结合 LBM 自身的特点 ,推导出双重网格的 LBM.这种算法利用粗网格上收敛较快和细网格上误差趋于光滑的优点 ,加快 LBM 的计算速度 ,提高了计算效率.二维 Poiseulle 流动和后台阶流动两个算例可以证明计算的效率明显提高 ,计算结果正确可靠.此外 ,从双重网格算法的计算时间与均匀网格算法的计算时间比较可知 ,计算效率提高的幅度随着网格的加密逐渐降低.其原因在于粗、细网格之间数据转换的次数增多 ,影响了计算效率的提高.在以后的工作中 ,笔者将利用不同的问题对这种算法进行检验 ,并在编程技巧和插值算子等方面加以改进 ,以进一步提高 LBM 的计算效率 ,促进 LBM 理论和应用的不断完善.

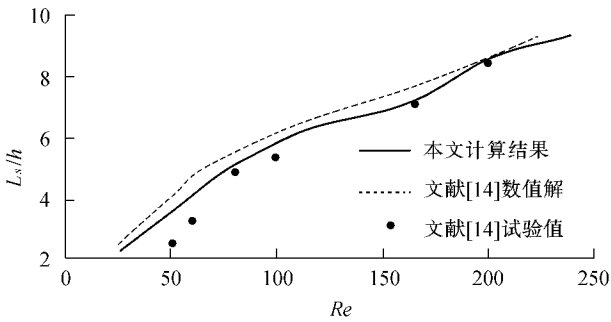


图 7 不同 Re 时的回流区长度 L_s

Fig.7 Length of backflow region L_s with different Reynolds numbers

参考文献 :

[1] FILIPPOVA O ,HÄNEL D. Grid refinement for Lattice-BGK model[J]. J Comput Phys , 1998 ,147 : 219—228.
[2] BHATNAGAR P L , GROSS E P , KROOK M. A model for collision processes in gases. I : Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems[J]. Phys Rev , 1954 , 94 : 511—525.
[3] 程永光. Lattice Boltzmann 方法及其在流场分析中应用的研究[D]. 武汉 : 武汉水利电力大学 , 1998.
[4] QI D. Lattice-Boltzmann simulation of fluidization of rectangular particles[J]. Int J Multiphase Flow , 2000 , 26 : 421—433.
[5] INAMURO T , YOSHINO M , OGINO F. Lattice Boltzmann simulation of flows in a three-dimensional porous structure[J]. Int J Numer

- Meth Fluids , 1999 , 29 : 737—748.
- [6] MARTINEZ D O , CHEN S , MATTHAEUS W H . Lattice Boltzmann magnetohydrodynamics [J]. Phys Plasmas , 1994 , 1(8) : 1850—1867.
- [7] KANDHAL D , VIDAL D J E , HOEKSTRA A G , *et al.* Lattice-Boltzmann and finite element simulations of fluid flow in a SMRX static mixer reactor [J]. Int J Numer Meth Fluids , 1999 , 31 : 1019—1033.
- [8] MARTINEZ D O , MATTHAEUS W H , CHEN S , *et al.* Comparison of spectral method and Lattice Boltzmann simulations of two-dimensional hydrodynamics [J]. Phys Fluids , 1994 , 6 : 1285—1297.
- [9] NOBLE D R , GEORGIADIS J G , BUCKIUS R O . Comparison of accuracy and performance for Lattice Boltzmann and finite difference simulation of steady viscous flow [J]. Int J Numer Meth Fluids , 1996 , 23 : 1—18.
- [10] HE X , ZHANG R , CHEN S , *et al.* On the three-dimensional Rayleigh-Taylor instability [J]. Phys Fluids , 1999 , 11 : 1143—1152.
- [11] 苏铭德, 黄素逸. 计算流体力学基础 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1997. 451—457.
- [12] MEI R , SHYY W . On the finite difference-based Lattice Boltzmann Method in curvilinear coordinates [J]. J Comput Phys , 1998 , 143 : 426—448.
- [13] CAO N , CHEN S , JIN S , *et al.* Physical symmetry and lattice symmetry in the Lattice Boltzmann Method [J]. Phys Rev , 1997 , E 55 : 21—24.
- [14] 孟国庆, 王羽中, 魏中磊. 方柱绕流的数值计算和试验研究 [J]. 水动力学研究与进展, 1992 , 7 : 493—499.

Lattice Boltzmann Method with double meshes

WANG Xing-yong¹ , SUO Li-sheng¹ , CHENG Yong-guang² , LIU De-you¹

(1. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China ;

2. College of Water Resources and Hydropower , Wuhan Univ. , Wuhan 430072 , China)

Abstract : To overcome the low computational efficiency of the Lattice Boltzmann Method (LBM) with uniform mesh , an LBM with double meshes was developed with its basic thought borrowed from the double-mesh algorithm in the finite difference method and its basic principle based on the character that the variables of the LBM are continuously distributed in the continuous flow field. Taking advantage of the merits of both the coarse and fine meshes , the present method accelerates the convergence rate and improves the efficiency of computation. Two numerical examples , i. e. a two-dimensional Poiseuille flow and a backward-facing step flow prove that the computer time by the double-mesh LBM is much less than that by the uniform-mesh LBM , and that the results obtained are correct and reliable.

Key words : Lattice Boltzmann Method (LBM); flow field computation ; double meshes ; computational efficiency