

隧洞围岩拉压不同模量弹性理论的解析解

朱珍德 ,张爱军 ,徐卫亚

(河海大学岩土工程研究所 ,江苏 南京 210098)

摘要 :采用拉压不同模量弹性理论 ,探讨水工压力隧洞围岩变形规律 ,推导了圆形隧洞弹性抗力系数与拉伸弹性模量、压缩弹性模量的数学表达式 .结果表明 ,恰当地利用围岩拉压不同模量比 ,调整支护结构 ,可以充分发挥围岩的自持能力 ,从而为隧洞围岩支护设计提供理论依据 .

关键词 :围岩 ;弹性模量 ;各向异性 ;弹性理论

中图分类号 :TU45 文献标识码 :A 文章编号 :1000-198X(2003)01-0021-04

拉压不同模量弹性理论是研究同种材料在主应力变号(拉、压)时相应的弹性常数不等的弹性力学 .它由前苏联 С.А. Амбарцумян^[1]首次提出的 .近十几年来 ,随着新型材料(混凝土、陶瓷、玻璃钢、塑料、某些金属材料等)的开发和科研、设计领域水平的提高 ,特别是大型电子计算机的普及与应用 ,使应用此理论来分析新型材料的强度、刚度和稳定性等问题已取得可观的成就 .在岩石力学方面 ,由于岩体内存在节理、裂隙、断层等缺陷 ,是非均质非各向同性介质 ,无论是水电工程库区高边坡开挖卸荷 ,还是地下洞室应力场重分布 ,围岩一部分可能会处于拉应力状态 ,采用拉压模量相同的弹性理论计算所得的变形结果往往偏小 ,有可能诱发工程事故 .因此 ,对于大型水利工程宜采用拉压不同模量弹性理论分析岩体(围岩)在拉压应力状态下的力学特征和变形破坏机理 ,以期获得岩土工程结构最佳设计并产生较优的经济效益 .

1 拉压不同模量弹性理论的本构关系

众所周知 ,拉压模量相同的弹性力学的基本假设为 :物体是连续、均质、完全弹性、小变形和各向同性的 .而各向异性弹性理论认为 ,物理上各点在不同方向上是各向异性的 ,其本构关系为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{a}' \boldsymbol{\sigma} \tag{1}$$

其中

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T \qquad \boldsymbol{a}' = a'_{ij}$$
$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}] \qquad i, j = 1, 2, \dots, 6$$

a'_{ij} 共 36 个弹性常数 .由长氏定理 , $a'_{ij} = a'_{ji}$,故即使是极端各向异性体 ,仅 21 个独立弹性常数 ;对正交各向异性体 ,有 9 个独立弹性常数 ;对平面问题 ,若坐标 xoy 是中面 ,则减少到 6 个独立弹性常数 ,若 x 和 y 同时是主方向 ,最终为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a'_{11} \sigma_x + a'_{12} \sigma_y + a'_{13} \sigma_z \\ \varepsilon_y &= a'_{21} \sigma_x + a'_{22} \sigma_y + a'_{23} \sigma_z \\ \varepsilon_z &= a'_{31} \sigma_x + a'_{32} \sigma_y + a'_{33} \sigma_z \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

对于平面应力($\sigma_z = 0$)问题 ,在工程上一般有

$$a'_{11} = 1/E_x \qquad a'_{22} = 1/E_y \qquad a'_{12} = a'_{21} = -\mu_x/E_x = -\mu_y/E_y$$

式中 E_x, E_y, μ_x, μ_y 分别为 x 和 y 方向的弹性模量和泊松比 .当介质为各向同性体时 ,有 $E_x = E_y = E, \mu_x = \mu_y = \mu$.

对于不同模量弹性理论 ,前述基本假设仍有效 ,但最后一个假设应改为实际材料随主应力符号改变而表现出不同的力学性质 ,也就是说在不同主拉、主压应力下 ,材料的变形参数分拉伸弹性模量(E^+)和压缩弹性

模量(E^-)以及不同的泊松比 μ^+ 和 μ^- ,其表达式为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z \\ \epsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z \\ \epsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 a_{ij} 应根据拉压应力状态不同而定.对于各向同性介质, $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1/E$, $a_{12} = a_{23} = a_{13} = -\mu/E$, $a_{ij} = a_{ji}$.但从大多数岩石试验结果可见,应力-应变呈双折线状,如图 1 所示,它们随主应力符号变而有不同的 E^+ 和 E^- ,在原点处总有一极小的光滑过渡段.根据主应力拉压不同应力状态, a_{ij} 可列表给出(表 1).

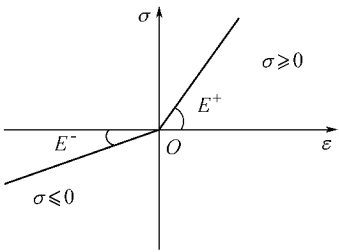


图 1 拉压不同模量本构关系曲线
Fig.1 Constitutive relation for different compressive and tensile moduli

表 1 拉压不同应力状态弹性常数的变化值

应力状态	a_{ij}					
	a_{11}	$a_{12}(a_{21})$	$a_{13}(a_{31})$	a_{22}	$a_{23}(a_{32})$	a_{33}
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z > 0$	$1/E^+$	$-\mu^+/E^+$	$-\mu^+/E^+$	$1/E^+$	$-\mu^+/E^+$	$1/E^+$
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z < 0$	$1/E^-$	$-\mu^-/E^-$	$-\mu^-/E^-$	$1/E^-$	$-\mu^-/E^-$	$1/E^-$
$\sigma_x > 0, \sigma_y < 0, \sigma_z > 0$	$1/E^+$	$-\mu^-/E^-$	$-\mu^+/E^+$	$1/E^-$	$-\mu^-/E^-$	$1/E^+$
$\sigma_y > 0, \sigma_x < 0, \sigma_z < 0$	$1/E^-$	$-\mu^-/E^-$	$-\mu^-/E^-$	$1/E^+$	$-\mu^+/E^+$	$1/E^-$

注: $-\mu^+/E^+ = -\mu^-/E^-$, 即 $a_{ij} = a_{ji}$.

对于平面应变问题, $\epsilon_z = 0$,起控制作用的是 σ_x 与 σ_y 异号,而 σ_z 可以变号.式(3)与式(2)看起来似乎相同,但仔细研究,发现模量相同的各向异性弹性理论之弹性常数与主应力符号无关,而不同模量弹性理论则要视主应力符号异同分段选用相应的弹性常数,如同横观各向同性材料.因此,在具体计算时,对同样条件下的结构物,采用不同的计算理论,会得到不同的结果.另外,值得一提的是,拉压不同模量弹性理论与经典弹性理论的平衡微分方程、几何方程是相同的.而双调和方程由于涉及到本构关系,两者则有所不同.

2 岩石强度试验

选取 16 种有代表性的岩石试件,按照岩石力学试验规范,取标准试件 $\varnothing 50 \times 100$ 在万能实验机或刚性伺服试验机上做单轴压缩试验以及用劈裂法试验,得到岩石的抗压、抗拉强度^[2],详见表 2.

表 2 16 种岩石的 E^+, E^-, μ^+, μ^- 值

岩石名称	常规压缩试验			劈裂法试验			μ^+/μ^-	E^+/E^-
	σ_c/MPa	$E^-/10^3\text{MPa}$	μ^-	σ_t/MPa	$E^+/10^3\text{MPa}$	μ^+		
方解石大理石	69.7	44	0.19	4.5	59	0.18	0.947	1.341
粗晶大理石	57.9	46	0.18	2.8	36	0.09	0.50	0.783
砂长岩	83.1	73	0.21	6.2	69	0.07	0.333	0.945
黄铁矿	52.4	110	0.23	8.7	149	0.17	0.739	1.355
砂化大理石	77.8	60	0.19	4.9	65	0.20	1.053	1.083
花岗闪长岩	157.3	76	0.25	11.7	62	0.16	0.64	0.816
砂质板岩	47.8	72	0.23	11.7	44	0.20	0.870	0.611
含矿角砾岩	73.6			3.0	65	0.11		
火成角砾岩	63.1	72	0.20	7.0	55	0.28	1.40	0.764
石灰岩		68	0.20	4.6		0.15	0.75	
页岩		24	0.22		40	0.28	1.273	1.667
砂质页岩		30	0.21					
砂岩		37	0.13		39			1.054
大理石灰岩		26	0.053		24	0.057	1.075	0.923
大理石		18	0.14		20	0.11	0.786	1.111
石英岩		51	0.05		19	0.16	3.20	0.373

从表 2 可以发现,岩石的 $E^+/E^- > 1$,其波动范围约为 1.1~1.8,若 $E^+/E^- < 1$,则 μ^+ 与 μ^- 变异较大,往往不符合 $\mu^+/E^+ = \mu^-/E^-$ 的理论关系,不过在计算时若缺 μ^+ 或 μ^- 资料,仍可用此理论关系,对计算结果影响不大.

3 压力隧洞围岩弹性解

考虑一半径为 a 的无限长隧洞,为了求得压力隧洞围岩的理论解答,首先解一个受均匀内、外压力 p_1 和 p_2 作用的厚壁圆筒(图 2).

无限长厚壁圆筒是轴对称平面应变问题,即 $\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0, \epsilon_z = 0$,故 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ 为主应力.若不计体力,由式(3)得

$$\sigma_z = \mu^+(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (\sigma_z > 0) \tag{4}$$

$$\sigma_z = \mu^-(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (\sigma_z < 0) \tag{5}$$

鉴于 σ_r 与 σ_θ 异号($\sigma_r < 0, \sigma_\theta > 0$),将式(4)或式(5)代入式(3)可得无限长厚壁圆筒平面应变问题的本构关系:

$$\epsilon_r = b_{11}\sigma_r + b_{12}\sigma_\theta \tag{6}$$

$$\epsilon_\theta = b_{21}\sigma_r + b_{22}\sigma_\theta \tag{7}$$

当 $\sigma_z > 0$ 时,式(6)(7)中弹性常数为

$$b_{11} = a_{11} - a_{12}^2/a_{33} = 1/E^- - (\mu^+)^2/E^+ \qquad b_{21} = b_{12} = a_{12}(1 - a_{12}/a_{33}) = -\mu^+(1 + \mu^+)/E^+$$

$$b_{22} = a_{22} - a_{12}^2/a_{33} = 1/E^+ - (\mu^+)^2/E^+ \qquad a_{33} = a_{22} = 1/E^+$$

由几何方程 $\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \epsilon_\theta = \frac{u}{r}$;平衡方程 $\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$;变形协调方程 $r \frac{d\epsilon_\theta}{dr} + \epsilon_\theta - \epsilon_r = 0$ 求解.设应力函数为 φ 与 $\psi, \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\psi}{r}, \sigma_\theta = \frac{d^2\varphi}{dr^2} = \frac{d\psi}{dr}$,代入变形协调方程(平衡方程自然满足),得定解方程

$$r^2 \frac{d^2\psi}{dr^2} + r \frac{d\psi}{dr} - \xi^2\psi = 0 \tag{8}$$

其中 $\xi = (b_{11}/b_{22})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{[\alpha^2 - (\mu^+)^2][1 - (\mu^+)^2]}$ $\alpha = (E^+/E^-)^{1/2}$

令 $t = r/b$,式(8)的通解为

$$\psi = Ct^\xi + Dt^{-\xi} \tag{9}$$

当 $\xi = 1$,即 $E^+/E^- = 1, \mu^+ = \mu^-$,式(9)变成 $\psi = Ct + Dt^{-1}$,为经典弹性解^[3].

当 $\xi \neq 1$,设 $\sigma_r < 0, \sigma_\theta > 0$ 则有

$$\sigma_r = Ct^{\xi-1} + Dt^{-(\xi+1)} \tag{10}$$

$$\sigma_\theta = C\xi t^{\xi-1} - D\xi t^{-(\xi+1)} \tag{11}$$

由边界条件 $t = m = a/b, \sigma_r = -p_1; t = 1 (r = b), \sigma_r = p_2 = 0$ 解出 C, D ,最终得

$$\sigma_r = -p_1 \frac{m^{\xi+1}}{1 - m^{2\xi}} \frac{1 - t^{2\xi}}{t^{\xi+1}} \tag{12}$$

$$\sigma_\theta = p_1 \xi \frac{m^{\xi+1}}{1 - m^{2\xi}} \frac{1 + t^{2\xi}}{t^{\xi+1}} \tag{13}$$

$$\sigma_z = \mu^+ \frac{p_1 m^{\xi+1}}{t^{\xi+1}(1 - m^{2\xi})} [\xi(1 + t^{2\xi}) - (1 - t^{2\xi})] \tag{14}$$

当 $\sigma_\theta > 0, \sigma_r < 0, \sigma_z > 0, m = 1/3, \mu^+ = 1/6$ 时 σ_θ 值列于表 3.由表 3 可见, $\alpha > 1$ 时比 $\alpha < 1$ 对 σ_θ 的影响更大.

水工压力隧洞弹性抗力系数 $k = E/[(1 + \mu)a]$ 为大家所熟悉的伽辽金公式^[4].若围岩为变弹模时,则可利用式(12)(13)和式(7),只要令 $b \rightarrow \infty$ 即可.由弹性关系

$$\epsilon_\theta = u/r = b_{21}\sigma_r + b_{22}\sigma_\theta =$$

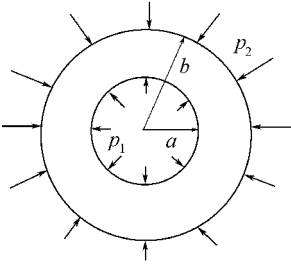


图 2 厚壁圆筒受均匀外压力 p_1, p_2 作用示意图

Fig.2 Thick-wall cylinder under uniform external pressure p_1 and p_2

表 3 不同 α 对压力隧洞 σ_θ 的影响

Table 3 Influences of different α on σ_θ in pressure tunnel							
α	0.50	0.64	0.81	1.00	1.44	1.69	2.00
σ_θ	1.082	1.130	1.187	1.000	1.388	1.464	1.555

$$\frac{-\mu^+(1+\mu^+)}{E^+}\sigma_r + \frac{1-(\mu^+)^2}{E^+}\sigma_\theta = \frac{\mu^+(1+\mu^+)}{E^+}\left[-\sigma_r + \frac{1-\mu^+}{\mu^+}\sigma_\theta\right] \quad (15)$$

将式(12)(13)代入式(15)可得

$$\frac{u}{r} = \frac{1+\mu^+}{E^+}\mu^+ \frac{p_1 m^{\xi+1}}{(1-m^{2\xi})l^{\xi+1}} \left[(1-t^{2\xi}) + \frac{1-\mu^+}{\mu^+}\xi(1+t^{2\xi})\right] \quad (16)$$

当 $r=a$ 时, $t=m=a/b \rightarrow 0$ (因 $b \rightarrow \infty$) 式(16)可写成

$$\frac{u}{a} = \frac{1+\mu^+}{E^+}\mu^+ \frac{p_1 m^{\xi+1}}{(1-m^{2\xi})m^{\xi+1}} \left[(1-m^{2\xi}) + \frac{1-\mu^+}{\mu^+}\xi(1+m^{2\xi})\right] = \frac{1+\mu^+}{E^+}\mu^+ p_1 \left[1 + \frac{1-\mu^+}{\mu^+}\xi\right] \quad (17)$$

$$\text{其中} \quad p_1 = k_1 u \quad k_1 = \frac{E^+}{(1+\mu^+)[\xi + \mu^+(1-\xi)]a} \quad (18)$$

k_1 即为承受均匀内压的圆形隧洞弹性模量时的弹性抗力系数。若 $E^+ > E^-$, 则 $\alpha > 1$, $\xi > 1$, $k_1 < k$; 若 $E^+ = E^-$, 则 $\alpha = 1$, $\xi = 1$, $k_1 = k$; 若 $E^+ < E^-$, 则 $\alpha < 1$, $\xi < 1$, $k_1 > k$ 。

可见在岩性为变弹模时, 其弹性抗力系数要酌情而定。为了节省测试平洞的造价, 岩体工程有时采用钻孔水压法代替压力枕或水压法(龙滩水电站试验洞等), 这样因钻孔半径 a 小, 成圆度好, 其结果要精确得多, 这对水工压力隧洞设计计算有积极意义。

4 结 语

a. 本文从理论上描述了真实岩石的本构关系, 即双折线型式, 在主应力变号时, E^+ , E^- , μ^+ , μ^- 不同, 其中自然也包括了经典弹性力学解。

b. 采用恰当的拉压模量比 $\alpha = \sqrt{E^+/E^-}$ 和调整 σ_z 的正负号(施加约束力), 能充分发挥围岩自持能力, 使设计方案达到最优。

参考文献:

- [1] Амбарцумян С.А. Раэансмдульная теория пругости [M]. Москва: Наука, 1982. 5—80.
- [2] 刘宝琛. 矿山岩体力学概论 [M]. 长沙: 湖南科技出版社, 1982. 21—23.
- [3] 徐志英. 岩石力学 [M]. 北京: 水利出版社, 1990. 18—83.
- [4] 陈子萌. 围岩力学分析中的解析方法 [M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1994. 291—300.

Analytic solution to elastic theory on surrounding rocks in tunnels with different compressive and tensile moduli

ZHU Zhen-de, ZHANG Ai-jun, XU Wei-ya

(Research Institute of Geotechnical Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: On the basis of the elastic theory for different compressive and tensile moduli, the deformation regularity of surrounding rocks in tunnels under hydraulic pressures was discussed, and mathematical expressions of the elastic resistance coefficient, the elastic compressive modulus, and the elastic tensile modulus were deduced. It is concluded that the adoption of different compressive and tensile moduli of surrounding rocks and the adjustment of the structure of supports may help bring the self-support ability of surrounding rocks into full play, and this provides a theoretical basis for the design of supports for surrounding rocks in tunnels.

Key words: surrounding rock; elastic moduli; anisotropy; elastic theory