

局部非协调网格在高拱坝应力分析中的应用

李同春 李 淼 温召旺 沈洪俊

(河海大学水利水电工程学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :在局部不协调网格界面上 ,以网格尺度较大单元所包含的界面上的节点作为基本节点 ,而界面上与网格尺度较小单元相应的节点作为从节点 ,建立了从节点与基本节点的线性插值关系 ,从而导出了以基本节点位移作为求解变量的局部非协调网格协调位移解法 .该方法应用于地基上复杂结构的受力分析 ,可使得结构网格较密 ,而地基网格稀疏 ,从而达到不失计算精度 ,提高求解效率的目的 .以某拱坝为例 ,探讨了局部不协调网格的处理方法对计算结果的影响 ,并验证了所提方法的正确性 .

关键词 插值 ;有限元 ;全协调网格 ;局部非协调网格 ;拱坝

中图分类号 :TV642.4 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2003)01-0042-04

对复杂水工结构(如坝、水闸、渡槽等)的受力分析 ,由于地基的影响较大 ,因此一般需考虑结构与地基的相互作用 .当采用有限元分析时 ,通常地基的模拟范围在各个方向上均取建筑物高度的一倍以上 ,常规的有限元分析一般采用全协调网格 ,即研究域内的任意一节点相连单元的集合包含以该节点为中心的微小空间全区域 ,如图 1 .这种解法的缺点在于当对上部结构进行网格加密时 ,相应地需对地基进行加密 ,常常导致地基内的单元数和节点数远远超过上部结构本身的单元和节点数 ,其结果是由于计算机的限制 ,结构分析不能采用过小的单元网格 .一般情况下 ,工程设计人员关心的是结构本身的受力特性 ,如应力、变形和稳定性等 ,因此对结构求解的精度要求较高 .而地基的模拟主要是考虑地基对上部结构的影响 ,对地基本身受力特性的精度没有过高要求 .因此在地基内布置很多单元和节点没有必要 ,合理的求解策略是地基采用较粗的网格 ,结构采用较密的网格 ,即局部非协调网格 ,如图 2 .这种网格的特点是局部区域内与某节点相连单元的集合不能覆盖以该节点为中心的微小空间全区域 ,如图 2 中的 A 点和 B 点 ,这些点的集合称为非协调点集 ,其余点集称为协调点集 .但是 ,用常规解法求解图 2 类问题时 ,由于节点 A 和 B 类似于自由边界点 ,因此会导致结果失真 .

对非协调网格问题 ,提出以协调节点集的位移变量作为基本变量 ,非协调节点集的变量作为从变量 ,通过线性插值建立从变量与基本变量之间的线性关系 ,从而导出以基本变量作为未知量的总体线性方程组 .

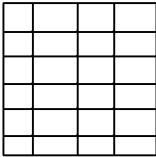


图 1 完全协调网格

Fig.1 Completely compatible mesh

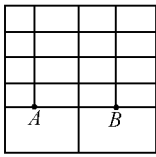


图 2 局部非协调网格

Fig.2 Locally incompatible mesh

1 基本原理

常规有限元的求解可归结于求解方程组^[1] :

$$Ku = F \tag{1}$$

式中 : K ——刚度矩阵 ; u ——位移列阵 ; F ——荷载列阵 ,且有

收稿日期 :2001-10-22
作者简介 :李同春(1963—) ,男 ,江苏姜堰人 ,教授 ,主要从事水工结构、减灾防灾工程方面的研究 .

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{K}^e \quad \mathbf{F} = \sum \mathbf{F}^e \quad (2)$$

对于完全协调网格,可直接用式(2)求解.而对局部非协调网格,因位移列阵 $\mathbf{u}$ 中只包含基本变量集,因此在将包含从变量的单元刚度矩阵、单元荷载列阵叠加到总体刚度矩阵和总体荷载列阵中时需进行适当转换方能叠加,下面以平面问题为例加以说明.

设某单元 i 的位移列阵为 $\mathbf{u}^e = \{u_1, u_2, \dots, u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_n\}^T$, n 为单元自由度总数,其中 u_{j1}, u_{j2} 隶属于从变量,其余隶属于基本变量, u_{j1}, u_{j2} 分别可表示成某些基本变量的线性函数,即

$$u_{j1} = \sum_{k_1=1}^{n_{j1}} \alpha_{j1}^{k_1} u_{j1}^{k_1} \quad u_{j2} = \sum_{k_2=1}^{n_{j2}} \alpha_{j2}^{k_2} u_{j2}^{k_2} \quad (3)$$

式中: n_{j1}, n_{j2} ——用于求解 i 单元 $j1, j2$ 自由度的基本变量数; $u_{j1}^{k_1}, u_{j2}^{k_2}$ ——基本变量($k_1 = 1 \sim n_{j1}, k_2 = 1 \sim n_{j2}$); $\alpha_{j1}^{k_1}, \alpha_{j2}^{k_2}$ ——相应的插值系数.根据式(3)有

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{C} \mathbf{u}'^e \quad (4)$$

$$\mathbf{u}'^e = \{u_1, u_2, \dots, u_{j1}^1, u_{j1}^2, \dots, u_{j1}^{n_{j1}}, u_{j2}^1, u_{j2}^2, \dots, u_{j2}^{n_{j2}}, \dots, u_n\}^T$$

单元平衡方程

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e \quad (5)$$

将式(4)代入式(5)得

$$\mathbf{K}^e \mathbf{C} \mathbf{u}'^e = \mathbf{F}^e \quad (6)$$

在上式两端乘以 $\mathbf{C}^T$ 得

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^e \mathbf{C} \mathbf{u}'^e &= \mathbf{C}^T \mathbf{F}^e & \text{或 } \mathbf{K}'^e \mathbf{u}'^e &= \mathbf{F}'^e \\ \mathbf{K}'^e &= \mathbf{C}^T \mathbf{K}^e & \mathbf{F}'^e &= \mathbf{C}^T \mathbf{F}^e \end{aligned} \quad (7)$$

因此对局部非协调网格问题,只要对包含从变量的单元在用式(2)求解单元总体刚度矩阵和荷载列阵时,用 $\mathbf{K}'^e$ 和 $\mathbf{F}'^e$ 代替原来的 $\mathbf{K}^e$ 和 $\mathbf{F}^e$ 即可,其余与常规有限元解法相同.

2 插值点和插值系数的求解

对局部非协调网格问题求解的关键是确定与式(3)对应的基本变量和相应的插值系数.根据等参单元的特点,将所有单元分成两组,即包含从变量节点的所有单元的单元组 1 和其余单元组成的单元组 2,则对于任意从变量节点,至少可以在单元组 2 中找到一个单元包含该节点.假设单元组 2 中包含从变量节点 i 的单元有 N_e 个,节点 i 位于单元($j=1 \sim N_e$)中的局部坐标为(ξ_j, η_j, ζ_j),则节点 i 的位移变量可以用单元($j=1 \sim N_e$)中节点的位移变量插值得得,即

$$u_i = \frac{1}{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{k=1}^{N_d} N_k(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) u_{jk} \quad (8)$$

式中: N_k —— j 单元的形函数; N_d ——单元节点数.

因此只要求得包含节点 i 的所有单元及该节点位于这些单元的局部坐标,则式(3)可非常方便地获得.这里给出一种简单的求解方法,等参单元中任一点的整体坐标可由局部坐标表示为^[2]

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^n N_i y_i \quad z = \sum_{i=1}^n N_i z_i \quad (9)$$

反之,若已知一点的整体坐标,可通过牛顿迭代法求解与之相对应的局部坐标.设第 n 次迭代求得的局部坐标为(ξ, η, ζ),则第 $n+1$ 次迭代过程为

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \\ \Delta \zeta \end{Bmatrix}^{n+1} \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \\ \Delta \zeta \end{Bmatrix}^{n+1} = - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{T} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x - \sum_{i=1}^n N_i x_i \\ y - \sum_{i=1}^n N_i x_i \\ z - \sum_{i=1}^n N_i x_i \end{Bmatrix} \tag{12}$$

迭代收敛控制标准采用 $\sqrt{\Delta \xi_{n+1}^2 + \Delta \eta_{n+1}^2 + \Delta \zeta_{n+1}^2} \leq \text{给定误差}$ (13)

对全部单元循环,寻找满足 $|\xi| \leq 1$, $|\eta| \leq 1$ 和 $|\zeta| \leq 1$ 的单元可获得包含该节点的单元集和相应的局部坐标,计算结果表明迭代方法收敛较快.

3 算 例

某双曲拱坝,坝高 278 m,坝底高程 332 m,坝顶高程 610 m,正常蓄水位 600 m.坝体容重 24 kN/m³,弹性模量为 24 × 10⁴ MPa,泊松比取 0.17,有限元计算模型见图 3.

为了验证本文方法的正确性和有效性,采用了 3 种计算模型.计算模型 I 采用全协调网格.计算模型 II 采用局部不协调网格,不协调面位于坝体与坝基交界附近并向坝基延伸两排协调单元,见图 4.计算模型 III 采用的网格与计算模型 II 相同,但内部任一点均不作任何插值处理.

在坝体上选取了 6 个有代表性的单元,其中单元 5 和单元 6 分别代表出现坝体最大拉应力和压应力的部位,见图 5 和图 6.计算模型 I 有限元网格节点数为 10504 个,单元数为 8298 个,而计算模型 II 和计算模型 III 有限元网格节点和单元数比计算模型 I 少得多,分别为 7026 个和 5 129 个.

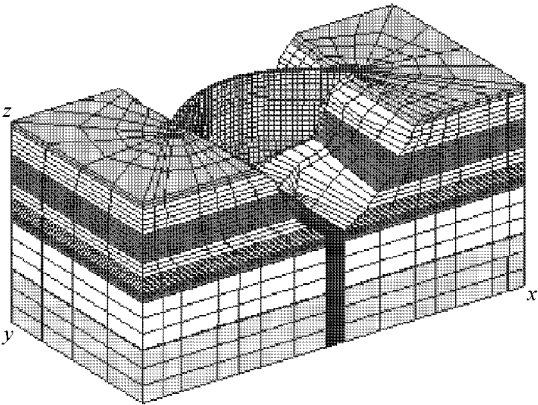


图 3 计算模型
Fig.3 Calculation model

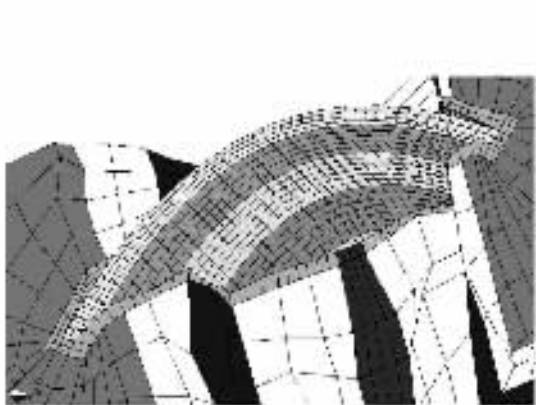


图 4 局部不协调网格位置
Fig.4 Position of locally incompatible mesh

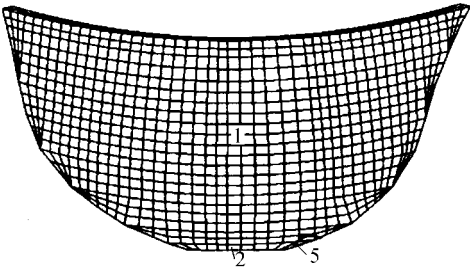


图 5 坝体上游面控制单元位置
Fig.5 Position of control elements
on upstream surface of arch dam

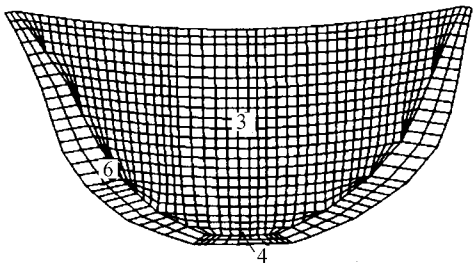


图 6 坝体下游面控制单元位置
Fig.6 Position of control elements
on downstream surface of arch dam

计算得出 3 种计算模型的坝体最大径向位移分别为 9.02 cm,8.97 cm 和 10.01 cm,由此可见,采用本文的局部不协调网格协调位移解法时,网格不协调时的坝体最大径向位移与网格完全协调时的结果相比仅差 0.05 cm,误差不超过 1%,而如果不对不协调点进行处理,则计算结果与网格完全协调时相比差 0.99 cm,误差

接近 11% .这充分说明了本文方法的正确性和必要性.

表 1 各控制单元不同计算模型应力结果比较

Table 1 Comparison of stress of control elements in different calculation models

MPa

单元 (高斯点)	计算模型 I			计算模型 II			计算模型 III		
	σ_1	σ_2	σ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_1	σ_2	σ_3
1(2)	-0.70	-2.51	-5.03	-0.70	-2.51	-5.03	-0.68	-2.62	-4.99
2(1)	3.22	-0.36	-3.30	3.34	-0.36	-3.32	3.00	-0.24	-2.93
3(8)	-0.45	-1.81	-4.89	-0.44	-1.80	-4.89	-0.45	-1.87	-4.87
4(8)	-0.96	-1.11	-9.56	-0.94	-1.10	-9.38	-1.27	-1.34	-10.88
5(8)	3.92	-0.22	-3.70	4.04	-0.20	-3.66	3.53	-0.21	-3.90
6(8)	-1.26	-1.77	-10.77	-1.19	-1.70	-10.29	-1.07	-2.07	-12.62

表 1 给出了坝体各控制部位不同计算模型的应力结果 , σ_1 , σ_2 和 σ_3 分别表示第一、第二和第三主应力. 为了更好地说明问题 ,在高斯点应力的选取上遵循以下原则 :若单元位于坝体上游面 ,则取出现拉应力最大的高斯点 ,相反 ,若单元位于坝体下游面 ,则取出现压应力最大的高斯点. 从该表可以看出 ,计算模型 I 与计算模型 II 的结果相差不大 ,最大误差也没超过 5% .而计算模型 III 的结果与计算模型 I 相比差别较大 ,特别是在靠近坝基的单元 2、4、5 和单元 6 ,计算结果与计算模型 I 的结果相比误差最大就达 33% ,这说明计算模型 III 的计算结果大大失真.

此外 ,该算例有限元计算是在 P III 933 的计算机上进行 ,模型 I 计算用时 6 min ,而模型 II 和模型 III 计算用时仅为 2 min ,这说明本文方法会大大提高求解效率.

4 结 论

提出局部非协调网格的协调位移解法 ,导出了协调位移的求解公式 ,并通过拱坝的算例证明了本文解法的正确性、必要性和合理性. 该方法为高效、高精度求解拱坝与地基相互作用问题提供了一个十分有效的途径.

参考文献 :

[1] 华东水利学院. 弹性力学问题的有限单元法[M]. 北京 :水利电力出版社 ,1978. 22—145.
[2] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 第 2 版. 北京 :中国水利水电出版社 ,1998. 168—229.

Application of locally incompatible meshes to stress analysis of high arch dams

LI Tong-chun , LI Miao , WEN Zhao-wang , SHEN Hong-jun

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China)

Abstract : On the interface of locally incompatible meshes , nodes belonging to large elements are regarded as basic nodes , and nodes belonging to small elements are regarded as subordinate nodes. The linear interpolation relation between basic nodes and subordinate nodes is developed to meet the requirement of the compatible displacement method for treatment of the locally incompatible mesh , in which the displacement of basic nodes is taken as a variable to be solved. This method can be used for stress analysis of complicated structures on the foundations. By setting of dense structure meshes and sparse foundation meshes , the method improves the efficiency of calculation , while does not decrease the accuracy of calculation. With an arch dam as an example , the effect is discussed of the locally incompatible mesh treatment method on the calculated result , and the method is verified to be reasonable.

Key words : interpolation ; finite element ; completely compatible mesh ; locally incompatible mesh ; arch dam