

解非线性极大极小问题的格雷码加速遗传算法

杨晓华 陆桂华 酃建强

(河海大学水资源环境学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :引进求解非线性极大极小问题的格雷码加速遗传算法(GAGA) ,给出 GAGA 算法实施的详细步骤 ,建立了 GAGA 相应的收敛定理 .对 GAGA 的有效性和可行性进行了理论分析和实例分析 .与一般的格雷码遗传算法(GGA)相比 ,GAGA 具有准确、快速和适用性强等特点 ,是一种既可以较大概率搜索全局最优解 ,又能进行局部细致搜索的优秀非线性优化方法 ,可广泛应用于各种优化问题中 .

关键词 格雷码 遗传算法 极大极小问题

中图分类号 :O24 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2003)01-0108-03

多目标优化问题有一部分可转化成非线性极大极小问题 ,它常常出现在工程设计、电子电路规划和对策论中 .对于非线性极大极小问题 ,由于目标函数的非光滑性 ,给解这类问题带来一些困难 .遗传算法(genetic algorithm ,简称 GA)作为一种借鉴生物界自然选择思想和自然遗传机制的全局随机搜索优化方法 ,模拟自然界中生物从低级向高级的进化过程 ,优化求解过程与梯度信息无关 ,对目标函数的光滑性不作要求 ,只需要目标函数是可计算的 ,对于复杂的优化问题只需选择、杂交、变异 3 种遗传运算就能得到优化解 .而格雷码(Gray code)遗传算法是其中一种较好的遗传算法 ,其主要优点是 :便于提高遗传算法的局部搜索能力 ;杂交、变异等遗传操作便于实现 ,符合最小字符集原则 ,能克服二进制编码 Hamming 悬崖的缺点 .由此本文提出用格雷码遗传算法来求解非线性极大极小问题 .

格雷码是这样的一种编码 ,其连续的两个整数所对应的编码值之间仅仅只有一个码位是不相同的 ,其余码位都完全相同 ,例如 15 和 16 的格雷码表示为 01000 和 11000 .二进制编码和格雷码之间的对应关系是 :设一个二进制编码为 $B = b_m b_{m-1} \dots b_2 b_1$,其对应的格雷码为 $G = g_m g_{m-1} \dots g_2 g_1$.由二进制编码到格雷码的转换公式为

$$g_m = b_m \tag{1}$$

$$g_i = b_{i+1} \oplus b_i \quad i = m - 1, m - 2, \dots, 1 \tag{2}$$

由格雷码到二进制编码的转换公式为

$$b_m = g_m \tag{3}$$

$$b_i = b_{i+1} \oplus g_i \quad i = m - 1, m - 2, \dots, 1 \tag{4}$$

上面两种转换公式中 , $\oplus$ 表示异或运算符 .

为了提高遗传算法的计算精度 ,本文采用格雷码编码 .为了提高遗传算法的计算速度 ,本文在格雷码遗传算法中引进加速搜索算子 ,逐步调整参数变化区间 ,由此形成了本文的格雷码加速遗传算法(Gray Coding Based Accelerating Genetic Algorithm ,简称 GAGA) .并给出了相应的收敛定理 .下面给出 GAGA 的计算技术 .

1 GAGA 的计算技术

不失一般性设非线性极大极小问题为

$$\begin{aligned} \min Q(x) &= \min_{1 \leq i \leq m} \max \{f_i(x)\} \\ \text{s. t. } a_j &\leq x_j \leq b_j \quad (j = 1, 2, \dots, p) \end{aligned} \tag{5}$$

式中 $\mathbf{x}=(x_1 \cdots x_p)^T$, x_j 为 p 个待优化变量.

格雷码加速遗传算法包括 8 步 (a)变量取值范围的格雷码编码.(b)初始父代的随机生成.(c)解码和父代个体的适应能力评价.(d)父代个体按比例选择.(e)父代个体的两点杂交.(f)子代个体的两点变异.(g)进化迭代.由上步得到的子代个体作为新的父代个体.算法转入步(c),进入下一次进化过程,重新评价、选择、杂交、变异,如此循环,优秀个体将逼近最优点.(h)加速循环.大量应用、研究表明,格雷码遗传算法(GGA)计算量大,全局优化速度慢,GGA 解的精度受编码长度控制.经深入分析格雷码遗传算法的选择、杂交、变异 3 种算子的寻优特性和大量的数值试验和实际应用,优化变量搜索空间的大小变化影响 GGA 的收敛速度和计算结果.范围越大,寻优时间越长,且初始解不易分散到整个解空间,对寻优结果有影响.GGA 在经过多次选择、杂交、变异等进化迭代后,群体将向着一个或少数几个方向移动,这暗示着最优解的趋向和分布所在,此时适当压缩 GGA 搜索区域就可避免后续 GGA 仍在整个解空间中搜索,以致做大量无用功.笔者仍把第一、第二次、第三次进化迭代所产生的 s 个优秀个体的变化范围作为变量新的取值范围^[1 2],算法转入(a),如此循环往复,优秀个体的变化范围将逐步收缩,与最优点的距离越来越近,直至达到预定加速次数或最优个体的目标函数值小于某一设定值,结束整个算法的运行.

以上 8 步构成格雷码加速遗传算法(GAGA).它自身的参数有长度 e ,父代个体数目 n ,优秀个体数目 s ,杂交概率 P_c 和变异率 P_m .显然,GAGA 的全局优化更具稳健性.在 p 个优化变量的问题和 GAGA 加速循环 q 次的情况下,优秀个体包围最优点的概率 P_{op} 为 $(1-0.5^{3s})^{pq}$.为了平衡群体规模与算法的收敛速度之间的矛盾,GAGA 取 $s=10$,及采用较少演化迭代次数(3 次)这一策略.显然,优秀个体包围最优点的概率决定了 GAGA 的全局优化性能. $s=10$, $p=10$, $q=10$,GAGA 优秀个体包围最优点的概率 $P_{op}=0.999\ 999\ 900$, $s=10$; $p=20$, $q=10$,GAGA 优秀个体包围最优点的概率 $P_{op}=0.999\ 999\ 800$.可见,GAGA 在压缩解空间时有很大的概率包围最优点.例 1、例 2,GAGA 的控制参数取 $n=300$, $s=10$, $P_c=1.0$, $P_m=1.0$.

2 GAGA 的收敛定理

定理 在收缩区间比小于常数 $a(a<1)$ 的条件下,GAGA 收敛.

证明 设式(5)变量的初始变化范围为闭 p 维长方体 $B_0=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\mid a_j^0\leq x_j\leq b_j^0,j=1,2,\cdots,p\}$,则据 GAGA 的计算原理,对第 t 次加速循环时变量的搜索范围为 $B_t=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\mid a_j^t\leq x_j\leq b_j^t,j=1,2,\cdots,p\}$,且有 $0\leq b_j^t-a_j^t\leq b_j^{t-1}-a_j^{t-1},t=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots,p$.若收缩区间比 $k_j^t=(b_j^t-a_j^t)(b_j^{t-1}-a_j^{t-1})\leq a<1(j=1,2,\cdots,p)$,因当 $T\rightarrow\infty$ 时, $0\leq\prod_{t=1}^T k_j^t\leq\prod_{t=1}^T a\rightarrow 0(j=1,2,\cdots,p)$,因此有:

- (a) $B_0\supset B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_t\supset B_{t+1}B\supset\cdots$
 - (b) 当 $t\rightarrow\infty$ 时,对于任意给定的 $x_t,y_t\in B_t,\|x_t-y_t\|\rightarrow 0$ 其中 $B_t\in R^p(t=1,2,\cdots)$.
- 由条件(a)和(b)利用完备距离空间的闭长方体套定理,知 GAGA 是收敛的.

3 算 例

例 1 求解

$$V=\min F(\mathbf{x})=\min \max(-x_1^2-x_2^2-1,x_1-x_2-2)$$
$$\text{s.t.}\quad g_1(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2-x_1-x_2\leq 0.25\quad x_1,x_2\geq 0$$

用 GAGA 法解上述极大极小问题,加速 10 次(相当于演化迭代 30 次)取 $Q(\mathbf{x})=F(\mathbf{x})+10^5\max(g_1(\mathbf{x})-0.25,0)$, $x_1\in[0,5],x_2\in[0,5]$,加速寻优 10 次可得解为 $x_1^*=0.393\ 0,x_2^*=1.338\ 2,f_1^*=-2.945\ 2,f_2^*=-2.945\ 2,V=-2.945\ 2$,其中 $g_1(\mathbf{x})=0.214\ 0$ 满足约束条件.而用 GGA 演化迭代 1000 次,最优目标函数值 $V=-2.816\ 223\ 00$.与 GGA 相比,显然,GAGA 速度较快,精度较高.

例 2 求解

$$V=\min Q(\mathbf{x})=\min \max(x_1^4+x_2^2(2-x_1)^2+(2-x_2)^2\ 2\exp(-x_1+x_2))$$

用 GAGA 法解上述极大极小问题, $x_1\in[-5,5],x_2\in[-5,5]$,加速寻优 10 次(相当于演化迭代 30 次),可得解为 $x_1^*=1.000\ 000\ 00,x_2^*=1.000\ 000\ 00,f_1^*=2.000\ 000\ 00,f_2^*=2.000\ 000\ 00,f_3^*=2.000\ 000\ 00,V=$

2.000 000 00. 与最优解完全符合. 而用 GGA 演化迭代 1000 次, 最优目标函数值 $V = 2.011\ 757\ 00$. 与 GGA 相比, 显然 GAGA 速度较快, 精度较高.

从例 1、例 2 可以看出, 在较少加速次数下, GAGA 法的计算精度较高.

4 结 语

本文提出了两点杂交、两点变异的格雷码加速遗传算法. 由于二进制遗传算法存在 Hamming 悬崖问题, 其计算精度受到一定影响, 本文采用格雷码编码, 在一定程度上可以提高计算精度, 但格雷码遗传算法收敛速度较慢. GAGA 法利用较优解的分布, 逐步缩小搜索空间, 自动向最优解收缩, 很快就能求得最优解. 文中给出了 GAGA 算法的详细步骤和算法参数的简便设置技术, 并在非线性极大极小问题中得到了精度较高的全局最优解. 本文算法不像优界数列法^[3]需要目标函数满足 Lipschitz 条件, 也不像最大熵 DEP 法那样需要目标函数及约束函数具有一阶偏导数存在. GAGA 只要求目标函数、约束函数可计算, 而且依较大概率全局收敛. GAGA 具有一定的理论意义和广泛的应用价值.

参考文献:

- [1] 金菊良, 杨晓华, 丁晶. 标准遗传算法的改进方案——加速遗传算法[J]. 系统工程理论与实践, 2001(1): 8—13.
- [2] 金菊良, 杨晓华, 储开凤, 等. 基因算法的应用及改进[J]. 河海大学学报, 1998, 26(2): 75—79.
- [3] 王海鹰, 董祖引, 张乃良. 一类多目标优化问题弱有效解的优界数列法[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2001, 29(5): 33—37.

Solving nonlinear minimax problems by Gray coding genetic algorithm

YANG Xiao-hua, LU Gui-hua, LI Jian-qiang

(College of Water Resources and Environment, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: A Gray coding based accelerating genetic algorithm (GAGA) was presented for nonlinear minimax problems. Detailed steps were developed for the GAGA, and a corresponding convergence theorem was given. Some theoretical and practical problems were analyzed with the GAGA. Compared with the GGA, the GAGA is accurate and fast in calculation and is widely applicable. It is a superior nonlinear optimization method that can search for the global optimal solution locally and meticulously with a high probability in various optimization problems.

Key words: Gray code; genetic algorithm; minimax problems