

相对 n -凝聚环

董祖引¹, 童纪新²

(1. 河海大学理学院, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学经济学院, 江苏 南京 210098)

摘要 : 引进 τ - n -凝聚环的概念, 具体地刻画了 τ - n -凝聚环, 得到一个环 R 是 τ - n -凝聚环的一些等价条件, 改进了引文 [1, 2, 3, 5] 的一些结果, 进一步地, 对于 n -凝聚环, 把单边挠理论的概念推广到双边挠理论的情形.

关键词 : R -模, 遗传挠理论, τ - n -凝聚环, τ_R - n -FP

中图分类号 : O15 **文献标识码** : A **文章编号** : 1000-1980(2003)01-0115-04

如果环 R 的每个有限生成右理想是有限表现的, 则称 R 是右凝聚环. 作为右 Noether 环的推广, Chase 在引文 [1] 中首次引进了右凝聚环的概念. Jones^[2]把 Chase 关于右凝聚环的概念推广到了任意的遗传挠理论 (hereditary torsion theory) $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 的情形, 如果环 R 的每个有限生成右理想是 τ -有限生成的, 则称 R 是右 τ -凝聚的. Gonzalez^[3]得到了 τ -凝聚环的一些进一步的性质.

Costa^[4]给出了 n -凝聚环的定义 (n 为任意的正整数). 如果环 R 的每个 n -表现右 R -模都是 $(n + 1)$ -表现的, 则称 R 是右 n -凝聚的. 陈建龙和丁南庆^[5]得到了 n -凝聚的进一步的性质. 本文中, 引进 τ - n -凝聚环的概念, 具体地刻画了 τ - n -凝聚环, 得到了一个环 R 是 τ - n -凝聚环的一些等价条件, 改进了引文 [1, 2, 3, 5] 的一些结果. 进一步地, 对于 n -凝聚环, 笔者把单边挠理论的概念推广到了双边挠理论的情形.

1 基本概念

如果右 R -模的一个子类 $\mathcal{S}$ 对于子模、同态像、扩张以及直和是封闭的, 则称 $\mathcal{S}$ 为一个遗传挠类 (hereditary torsion class), $\mathcal{S}$ 可以惟一地确定一个无挠类 (torsion-free class) $\mathcal{F} = \{ M \mid \text{Hom}_R(T, M) = 0 \text{ 对所有的 } T \in \mathcal{S} \}$. 显然, $\mathcal{S}$ 对于子模、内射包、扩张和直积是封闭的, 此时称 $\tau = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ 是右 R -模的一个遗传挠理论. 对于一个右 R -模 M , 如果存在 M 的子模 M' 使得 $M/M' \in \mathcal{F}$, 则称 M_R 是 τ -有限生成的, 如果存在一个正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$, 此处 F 是有限生成自由的, K 是 τ -有限生成的, 则称 M_R 是 τ -有限表现的 (τ -finitely presented).

设 R 是环, n 是非负整数, 根据文献 [3 ~ 6], 如果存在一个右 R -模的正合列 $F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 这里每个 F_i 是有限生成自由 (投射) 右 R -模, 则称 M 是 n -表现的, 或 n -FP. 这个概念容易推广到挠理论 $\tau_R = (\mathcal{T}_R, \mathcal{F}_R)$ 中去. 设 M 是一个右 R -模, n 是非负整数, 如果存在一个正合列 $0 \rightarrow K_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow F_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 这里每个 F_i 是有限生成自由 (投射) 右 R -模, K_n 是 τ_R -有限生成的, 则称 M 是 τ_R - n -表现的 (或 M 是 τ_R - n -FP). 如果每个 n -表现的右 R -模是 $(n + 1)$ -表现的 (见文献 [4] [5]), 称环 R 是右 n -凝聚的. 如果任一 n -FP 右 R -模是 τ_R - $(n + 1)$ -FP, 则称环 R 是 τ_R - n -凝聚的. 设 M 是一右 R -模, n 是正整数, 如果 $\text{Tor}_n^R(M, N) = 0$ 对所有 n -FP 左 R -模 N 成立, 则称 M 是 n -平坦的. 如果 $\text{Ext}_R^n(N, M) = 0$ 对所有 n -FP 右 R -模 N 成立, 则称 M 是 n -FP-内射的. 类似地可定义 M 为左 R -模的情形.

本文中, 所有的环均是有单位元的结合环, 所有的模均是酉模, 对于任一模 M , 用 $M^+ = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 表示 M 的示性模.

收稿日期 2001-12-18
作者简介 董祖引 (1964—), 男, 浙江鄞县人, 副教授, 主要从事代数研究.

2 主要结果

定理 1 设 R 是一环, n 为非负整数, 又设 $\tau_R=(\mathcal{T}_R, \mathcal{F}_R)$ 是一右 R -模的遗传挠理论, 则下列命题等价:

- (a) R 是 τ_R - n -凝聚的;
- (b) 对于任一 n -FP 右 R -模 N 和任一 τ_R -挠右 R -模 M 标准同态 $\text{Tor}_n^R(N, M^+) \rightarrow \text{Ext}_R^n(N, M)^+$ 是同构的;
- (c) 如果 M 是一个 τ_R -无挠内射右 R -模, 则 M^+ 是 n -平坦的;
- (d) 对于任一 τ_R -无挠右 R -模 M , M 是 n -FP-内射的当且仅当 M^+ 是 n -平坦的;
- (e) 对于任一 τ_R -无挠右 R -模 M , M 是 n -FP-内射的当且仅当 M^{++} 是 n -FP-内射的;
- (f) 对于任一 n -FP 右 R -模 N 以及任一 τ_R -无挠右 R -模的正向系 $\{M_i\}_{i \in I}$, $\varinjlim \text{Ext}_R^n(N, M_i) \rightarrow \text{Ext}_R^n(N, \varinjlim M_i)$ 是同构的;
- (g) 任一 τ_R -无挠 n -FP-内射右 R -模的正向极限是 n -FP-内射的;
- (h) 若 M 是一个右 R -模, 使得对任一 τ_R -($n+1$)-FP 右 R -模 N 总有 $\text{Ext}_R^n(N, M)=0$, 则 M 是 n -FP-内射的.

证明 (a) $\Leftrightarrow$ (b) 若 $n=1$, 由文献 [3] 中的定理 3 即得. 下面假定 $n \geq 2$.

设 N 是任一 n -FP 右 R -模, 且 M 是一个 τ_R -无挠右 R -模. 考虑正合列

$$F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow F_{n-2} \rightarrow F_{n-3} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow N \rightarrow 0$$

这里每个 F_i 是有限生成自由的. 假设 $K_{n-2} = \text{Ker}(F_{n-2} \rightarrow F_{n-3})$ 若 $n=2$, 定义 $F_{-1} = N$), 则

$$\text{Tor}_n^R(N, M^+) \cong \text{Tor}_1^R(K_{n-2}, M^+)$$

以及 $\text{Ext}_R^n(N, M)^+ \cong \text{Ext}_R^1(K_{n-2}, M)^+$

显然, N 是 τ_R -($n+1$)-FP 当且仅当 K_{n-2} 是 τ_R -2-FP. 由文献 [3] 中的命题 2, K_{n-2} 是 τ_R -2-FP 当且仅当

$$\text{Ext}_R^1(K_{n-2}, M)^+ \cong \text{Tor}_1^R(K_{n-2}, M^+)$$

对每个 τ_R -无挠右 R -模 M 成立, 故 N 是 τ_R -($n+1$)-FP 当且仅当 $\text{Ext}_R^n(N, M)^+ \cong \text{Tor}_n^R(N, M^+)$ 对每个 τ_R -无挠右 R -模 M 成立. 于是 R 是 τ_R - n -凝聚的当且仅当对每一 n -FP 右 R -模 N , N 是 τ_R -($n+1$)-FP 当且仅当 $\text{Tor}_n^R(N, M^+) \cong \text{Ext}_R^n(N, M)^+$ 对于每个 τ_R -无挠右 R -模 M 成立.

(b) $\Rightarrow$ (c) 显然.

(c) $\Rightarrow$ (a) 设 N 是任一 n -FP 右 R -模, 即存在一个正合列

$$F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow N \rightarrow 0$$

其中每个 F_i 是有限生成自由的. 令 $K_i = \text{Ker}(F_i \rightarrow F_{i-1})$, $i=1, 2, \dots, n$, 以及 $K_0 = \text{Ker}(F_0 \rightarrow M)$. 显然, N 是 τ_R -($n+1$)-FP 当且仅当 K_{n-2} 是 τ_R -2-FP, 由文献 [3] 中的命题 2, 当且仅当 $\text{Tor}_1^R(K_{n-2}, M^+) = 0$ 对于每个 τ_R -无挠内射右 R -模 M 成立. 由 (c), $\text{Tor}_n^R(N, M^+) = 0$ 对每个 τ_R -无挠内射右 R -模 M 成立, 但 $\text{Tor}_1^R(K_{n-2}, M^+) \cong \text{Tor}_n^R(N, M^+) = 0$, 故 (a) 成立.

(b) $\Rightarrow$ (d) 和 (d) $\Rightarrow$ (c) 显然.

(d) $\Leftrightarrow$ (e) 由文献 [5] 中的命题 2.3 即得.

(a) $\Rightarrow$ (f) 设 N 是一个 n -FP 右 R -模, 在 (a) $\Leftrightarrow$ (b) 的证明中, 有

$$\text{Ext}_R^1(K_{n-2}, M_i) \cong \text{Ext}_R^n(N, M_i)$$

以及对于每个 τ_R -无挠右 R -模的正向系 $\{M_i\}_{i \in I}$, 有 $\varinjlim \text{Ext}_R^1(K_{n-2}, M_i) \cong \varinjlim \text{Ext}_R^n(N, M_i)$, 类似于 (a) $\Leftrightarrow$ (b) 的证明, 利用文献 [3] 中的命题 2, 有 N 是 τ_R -($n+1$)-FP 当且仅当对于每个 τ_R -无挠右 R -模的正向系 $\{M_i\}_{i \in I}$ 有 $\varinjlim \text{Ext}_R^n(N, M_i) \cong \text{Ext}_R^n(N, \varinjlim M_i)$.

(f) $\Rightarrow$ (g) 显然.

(g) $\Rightarrow$ (a) 设 N 是任一 n -FP 右 R -模, 类似于 (a) $\Leftrightarrow$ (b) 的证明, 只要证得 K_{n-2} 是 τ_R -2-FP 的即可.

设 $\{M_i\}_{i \in I}$ 是 τ_R -无挠 n -FP 内射 R -模的正向系, 由 (c), $\varinjlim M_i$ 是 n -FP 内射的. 则

$$\text{Ext}_R^1(K_{n-2} \varinjlim M_i) \cong \text{Ext}_R^n(N \varinjlim M_i) = 0$$

但是 $\varinjlim \text{Ext}_R^1(K_{n-2}, M_i) \cong \varinjlim \text{Ext}_R^n(N, M_i) = 0$ 故 $\text{Ext}_R^1(K_{n-2} \varinjlim M_i) \cong \varinjlim \text{Ext}_R^1(K_{n-2}, M_i)$.

由文献 3 中的命题 2, K_{n-2} 是 τ_R -2-FP 故 N 是 τ_R -($n+1$)-FP. 所以 (a) 成立.

(a) $\Rightarrow$ (h) 显然.

(h) $\Rightarrow$ (g) 设 $\{M_i\}_{i \in I}$ 是一个 τ_R -无挠 n -FP 内射右 R -模的正向系, 且 N 是任一 τ_R -($n+1$)-FP 右 R -模, 考虑正合列 $0 \rightarrow K_{n+1} \rightarrow F_n \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \rightarrow N \rightarrow 0$, 其中 F_i 是有限生成自由的, 且 K_{n+1} 是 τ_R -有限生成的. 设 $K_{n-2} = \text{Ker}(K_{n-2} \rightarrow K_{n-3})$ 则 K_{n-2} 是 τ_R -2-FP. 利用文献 3 中的命题 2, 有 $\varinjlim \text{Ext}_R^1(K_{n-2}, M_i) \cong \text{Ext}_R^1(K_{n-2} \varinjlim M_i)$. 而 $\text{Ext}_R^1(K_{n-2}, M_i) \cong \text{Ext}_R^n(N, M_i)$, 以及 $\text{Ext}_R^1(K_{n-2} \varinjlim M_i) \cong \text{Ext}_R^n(N \varinjlim M_i)$. 所以

$$\text{Ext}_R^1(N \varinjlim M_i) \cong \varinjlim \text{Ext}_R^n(N, M_i) = 0$$

由 (h) $\varinjlim M_i$ 是 n -FP 内射的, 故 (g) 成立.

作为定理 1 的应用, 笔者给出右 n -凝聚环的进一步性质.

推论 2 下列各条件等价:

(a) R 是右 n -凝聚的;

(b) 对任一 n -FP 右 R -模 N 及任一右 R -模 M , 标准同态 $\text{Tor}_n^R(N, M^+) \rightarrow \text{Ext}_R^n(N, M)^+$ 是同构的;

(c) 对任一内射右 R -模 M , M^+ 是 n -平坦的;

(d) 若 M 是一个右 R -模, 使得对任一 $(n+1)$ -FP 右 R -模 N 都有 $\text{Ext}_R^n(N, M) = 0$ 则 M 是 n -FP 内射的.

下面, 将对 n -凝聚环的单边挠理论推广到双边挠理论.

定义 3 设 $\tau_1 = (\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$, $\tau_2 = (\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ 分别是右 R -模和左 R -模的挠理论, 如果右 R -模 $M \in \mathcal{T}_1$, 且 $M^+ \in \mathcal{F}_2$ 则称右 R -模 M 是 $\tau_1 | \tau_2$ -无挠的. 如果有限生成的右 R -模 M 对任一 $\tau_1 | \tau_2$ -无挠的右 R -模 N , 标准同态 $M \otimes_R N^+ \rightarrow \text{Hom}_R(M, N)^+$ 都是同构的, 则称有限生成的右 R -模 M 是 $\tau_1 | \tau_2$ -FP (或 $\tau_1 | \tau_2$ -1-FP); 当 $n \geq 2$ 时, 如果存在一个正合列

$$0 \rightarrow K_{n-1} \rightarrow F_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

其中每个 F_i 是有限生成自由的, 且 K_{n-1} 是 $\tau_1 | \tau_2$ -FP, 则称 M 是 $\tau_1 | \tau_2$ - n -FP. 如果每个 n -FP 右 R -模是 $\tau_1 | \tau_2$ -($n+1$)-FP, 则称环 R 是 $\tau_1 | \tau_2$ - n -凝聚的.

显然, 任意 n -FP 右 R -模是 τ_1 - n -FP, 任意 τ_1 - n -FP 右 R -模是 $\tau_1 | \tau_2$ - n -FP. 任意 τ_1 - n -凝聚环是 $\tau_1 | \tau_2$ - n -凝聚的, 但反之未必成立. 例如, 设 R 是一个非右 n -凝聚环, 又设 $\tau_1 = \{0\}$, $\tau_2 = \{\text{全体左 } R\text{-模}\}$, 则 R 是 $\tau_1 | \tau_2$ - n -凝聚的, 但非 τ_1 - n -凝聚的.

引理 4 设 $\tau_1 = (\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$, $\tau_2 = (\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ 分别是右 R -模和左 R -模的挠理论, 又设 M 是有限表现右 R -模, 若 $\tau_1 | \tau_2$ -无挠类对于内射包封闭, 则下列条件等价:

(a) M 是 $\tau_1 | \tau_2$ -2-FP;

(b) 对任一 $\tau_1 | \tau_2$ -无挠模 X , $\varphi: \text{Tor}_1^R(M, X^+) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, X)^+$ 同构;

(c) 对任一 $\tau_1 | \tau_2$ -无挠内射模 X , $\text{Tor}_1^R(M, X^+) = 0$.

证明是容易的(略).

定理 5 设 $\tau_1 = (\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$, $\tau_2 = (\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ 分别是右 R -模和左 R -模的挠理论, 若 $\tau_1 | \tau_2$ -无挠类对于内射包封闭, n 为正整数, 则下列命题等价:

(a) R 是 $\tau_1 | \tau_2$ - n -凝聚的;

(b) 对于每个 n -FP 右 R -模 N 和每个 $\tau_1 | \tau_2$ -无挠右 R -模 M , 标准同态 $\text{Tor}_n^R(N, M^+) \rightarrow \text{Ext}_R^n(N, M)^+$ 是同构的;

(c) 若 M 是 $\tau_1 | \tau_2$ -无挠内射右 R -模, 则 M^+ 是 n -平坦的;

(d) 对每个 $\tau_1 | \tau_2$ -无挠右 R -模 M , M 是 n -FP 内射的当且仅当 M^+ 是 n -平坦的;

(e) 对每个 $\tau_1 | \tau_2$ -无挠右 R -模 M , M 是 n -FP 内射的当且仅当 M^{++} 是 n -FP 内射的.

证明 利用引理 4, 类似于定理 1 的证明, 可得到全部结论(略).

参考文献：

[1] CHASE S U. Direct products of modules[J]. Trans Amer Math Soc ,1960 97 :457—473.
[2] JONES M F. Coherence relative to an hereditary[J]. Comm in Algebra ,1982 ,10 :719—739.
[3] GONZALEZ N R. On relative coherence application[J]. Comm in Algebra ,1993 21 :1529—1542.
[4] COSTA D L. Parameterizing families of non-noetherian rings[J]. Comm in Algebra ,1994 22 :3997—4011.
[5] CHEN J L ,DING N Q. On n -coherent rings[J]. Comm in Algebra ,1996 24 :3211—3216.
[6] XUE Wei-min. On n -presented modules and almost excellent extensions[J]. Comm in Algebra ,1999 27 :1091—1102.
[7] 佟文廷.同调代数引论[M].北京 :高等教育出版社 ,1998.202—246.

Relative n -coherent rings

DONG Zu-yin¹ , TONG Ji-xin²

(1. College of Science , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China ;
2. College of Economics , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China)

Abstract : The concept of τ - n -coherent ring is introduced , and some sufficient and necessary conditions for a ring to be a τ - n -coherent ring are obtained . Furthermore , one-sided torsion theories are extended to two-sided torsion theories with respect to n -coherent rings .

Key words : R -module ; hereditary torsion theory ; τ - n -coherent ring ; τ_R - n -FP

《河海大学学报(哲学社会科学版)》征订启事

(CN32 - 1521/C , ISSN1671 - 4970 , 季刊 , 自办发行)

本刊以马列主义、毛泽东思想和邓小平理论为指导 , 坚持实事求是的思想路线 , 贯彻“ 双百 ” 方针 , 弘扬时代主旋律 , 理论联系实际 , 为社会主义物质文明与精神文明建设服务 .

本刊为哲学与社会科学类学术期刊 , 主要刊登哲学、政治学、文学、史学、语言学、法学、社会学、心理学、经济学、管理学、高等教育学等社会科学方面的研究成果、学术论文、综述等学术性文章 . 本刊可供上述有关专业的研究人员、管理人员和大专院校师生阅读与参考 . 本刊为中国学术期刊(光盘版) 入编期刊与中国学术期刊网入编期刊 .

本刊由河海大学主办 , 每季末出版 , 国内外公开发行 , 每期定价 5 元 , 每期邮费 : 1 元 , 全年订费 24 元 . 欢迎广大读者直接向编辑部订阅 . 联系地址 : 南京市西康路 1 号《河海大学学报(哲学社会科学版)》编辑部 , 邮政编码 210098 . 联系电话 (025) 8786376 .