

可考虑剪切变形影响的稳定函数单元模型

夏逸鸣¹,吴胜兴¹,席 瑶²

(1.河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098;2.东南大学土木工程学院,江苏 南京 210096)

摘要 以考虑剪切变形影响的稳定函数单元的割线刚度方程为基础,导出了单元切线刚度方程.针对切线刚度矩阵中一些元素的数值在某一区段内难于求得的问题,采用数字插值和多项式曲线拟合的方法,得到了切线刚度矩阵.最后,由数值算例验证了改进模型的正确性.

关键词 稳定函数单元 割线刚度 切线刚度 剪切变形

中图分类号 :TU311 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2003)02-0180-04

在构造一个能考虑稳定效应的几何非线性单元模型中,由 Oran^[1]发展的以稳定函数作为单元位移场而建立起来的稳定函数单元模型,被公认为是一种最精确、最实用的杆件非线性分析模型,已广泛应用于各种结构的非线性分析中^[2,3].但是,在应用该模型对结构进行非线性分析时,都没有考虑剪切变形的影响,其难点之一是单元的切线刚度矩阵中的一些刚度元素的数值在某一区段内难于求得.本文首次采用数字插值及多项式曲线拟合的方法,比较容易地求出了切线刚度矩阵的数值.该方法为更精确的结构分析提供了必要的手段.

1 单元的割线刚度方程

本文以可考虑剪切变形的稳定函数作为位移场来建立有限元计算模型,并作如下假设:(a)单元为等截面和弹性的,横截面为双轴对称,其变形后仍保持平面;(b)不考虑局部屈曲、侧向扭转屈曲影响;(c)小应变,大变形;(d)所有外载都是保守力.

由文献[4]可得单元的割线刚度方程

$$M_1 = \frac{EI}{L}(C_1\theta_1 + C_2\theta_2) \quad M_2 = \frac{EI}{L}(C_2\theta_1 + C_1\theta_2) \quad P = EA\left(\frac{e}{L} + C_b\right) \tag{1}$$

式中 C_1, C_2 的具体表达式见文献[4].

由于弯剪变形而引起的单元轴向应变为

$$C_b = \frac{1}{2L}\int_0^L\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx \tag{2}$$

式中 y 为单元的稳定挠曲函数^[4],通过积分可得

$$C_b = m(C_1 + C_2)^2(\theta_1 + \theta_2)^2 + n(C_1 - C_2)^2(\theta_1 - \theta_2)^2 \tag{3}$$

式中 m, n 为与轴力有关的系数.对比不考虑剪切变形的且与式(3)形式相同的表达式^[3] $b_1 = (C_1^0 + C_2^0)(C_2^0 - 2)/(8\pi^2q)$, $b_2 = C_2^0/[8(C_1^0 + C_2^0)]$,可推得

$$m(C_1^0 + C_2^0)^2 = \frac{(C_1^0 + C_2^0)(C_2^0 - 2)}{8\pi^2q} \quad m = \frac{(C_1^0 + C_2^0)(C_2^0 - 2)}{8\pi^2q(C_1^0 + C_2^0)^2}$$
$$n(C_1^0 + C_2^0)^2 = \frac{C_2^0}{8(C_1^0 + C_2^0)} \quad n = \frac{C_2^0}{8(C_1^0 + C_2^0)(C_1^0 - C_2^0)^2}$$

将 m, n 代入式(3)中可得

$$C_b = b_1(\theta_1 + \theta_2)^2 + b_2(\theta_1 - \theta_2)^2 \tag{4}$$
$$b_1 = \frac{(C_1^0 + C_2^0)(C_2^0 - 2)}{8\pi^2 q} \frac{(C_1 + C_2)^2}{(C_1^0 + C_2^0)^2} \quad b_2 = \frac{C_2^0}{8(C_1^0 + C_2^0)} \frac{(C_1 - C_2)^2}{(C_1^0 - C_2^0)^2} \quad q = \frac{PL^2}{\pi^2 EIa}$$

式中 C_1^0, C_2^0 是不考虑剪切变形影响的弯曲刚度系数,其表达式见文献[1].

可将上述平面割线刚度方程(1)扩展成空间割线刚度方程

$$\left. \begin{aligned} M_{1n} &= \left[\frac{EI}{L} \right]_n [C_{1n}\theta_{1n} + C_{2n}\theta_{2n}] & (n = 2,3) \\ M_{2n} &= \left[\frac{EI}{L} \right]_n [C_{2n}\theta_{1n} + C_{1n}\theta_{2n}] & (n = 2,3) \\ P &= EA \left[\frac{e}{L} \sum_{n=2,3} b_{1n}(\theta_{1n} + \theta_{2n})^2 + b_{2n}(\theta_{1n} - \theta_{2n})^2 \right] \\ M_{11} &= \frac{GJ}{L} \theta_{11} \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

2 梁柱单元的切线刚度方程

单元的切线刚度方程可通过求导割线刚度方程(5)而得,即

$$k_{ij} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial d_j} + \frac{\partial f_i}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial d_j} \right] \tag{6}$$

对于空间情况, f, d 定义为

$$\left. \begin{aligned} f &= [P \quad M_{12} \quad M_{13} \quad M_{11} \quad M_{22} \quad M_{23}]^T \\ d &= [e \quad \theta_{12} \quad \theta_{13} \quad \theta_{11} \quad \theta_{22} \quad \theta_{23}]^T \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

由此可求得单元的切线刚度矩阵方程为

$$\Delta f = k_e \Delta d \tag{8}$$

式(8)中 k_e 为单元的切线刚度矩阵,其表达式可取为

$$k_e = \frac{EI_3}{L} \left[\begin{array}{cccccc} \frac{\pi^2 a^2}{HL^2} & \frac{\pi^2 a^2 W_{12}}{HL} & \frac{\pi^2 a^2 W_{13}}{HL} & 0 & \frac{\pi^2 a^2 W_{22}}{HL} & \frac{\pi^2 a^2 W_{23}}{HL} \\ & \beta C_{12} + \frac{G_{12} W_{12}}{H} & \frac{G_{12} W_{12}}{H} & 0 & \beta C_{22} + \frac{G_{12} W_{22}}{H} & \frac{G_{12} W_{23}}{H} \\ & & C_{13} + \frac{G_{13} W_{13}}{H} & 0 & \frac{G_{13} W_{22}}{H} & C_{23} + \frac{G_{13} W_{23}}{H} \\ & & & \frac{GJ}{EI_3} & 0 & 0 \\ \text{对称} & & & & \beta C_{22} + \frac{G_{22} W_{22}}{H} & \frac{G_{22} W_{23}}{H} \\ & & & & & C_{23} + \frac{G_{23} W_{23}}{H} \end{array} \right]$$

式中有关系数可由下列各式确定：

$$\frac{\partial q_2}{\partial q_3} = \frac{I_3}{I_2} = \beta \quad \frac{\partial q_3}{\partial \theta_{13}} = \frac{W_{13}}{H} \quad \frac{\partial q_3}{\partial \theta_{23}} = \frac{W_{23}}{H}$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial \theta_{12}} = \frac{W_{12}}{H} \quad \frac{\partial q_3}{\partial \theta_{22}} = \frac{W_{22}}{H} \quad \frac{\partial q_3}{\partial e} = \frac{1}{LH} \quad \frac{\partial q_3}{\partial \theta_{11}} = 0$$

$$H = \frac{\pi^2 a^2}{\lambda_3^2} - b'_{13}(\theta_{13} + \theta_{23})^2 - b'_{23}(\theta_{13} - \theta_{23})^2 - \beta b'_{13}(\theta_{12} + \theta_{22})^2 - \beta b'_{23}(\theta_{12} - \theta_{22})^2$$

$$W_{12} = 2[(b_{12} + b_{22})\theta_{12} + (b_{12} - b_{22})\theta_{22}] \quad W_{22} = 2[(b_{12} - b_{22})\theta_{12} + (b_{12} + b_{22})\theta_{22}]$$

$$W_{13} = 2[(b_{13} + b_{23})\theta_{13} + (b_{13} - b_{23})\theta_{23}] \quad W_{23} = 2[(b_{13} - b_{23})\theta_{13} + (b_{13} + b_{23})\theta_{23}]$$

$$G_{12} = C'_{12}\theta_{12} + C'_{22}\theta_{22} \quad G_{22} = C'_{22}\theta_{12} + C'_{12}\theta_{22} \quad G_{13} = C'_{13}\theta_{13} + C'_{23}\theta_{23} \quad G_{23} = C'_{23}\theta_{13} + C'_{13}\theta_{23}$$

式中: $a = 1 - \frac{kP}{GA}$, k 为剪切不均匀系数; G ——剪切模量; A, L ——单元横截面积和单元长度.

由于 C_{1n}, C_{2n} 的导数在 $\varphi (\varphi = \sqrt{PL^2/(EIa)})$ 为零附近的数值难于由其导函数表达式直接获得, 故求得 C_{1n}, C_{2n} 的导数值就成为解决问题的难点和关键. 本文采用差分商取代 C_{1n}, C_{2n} 的导数. 只要差分段足够精细, 差分商就具有极高的精度. 为了实现对具体问题的计算, 首先求出数个点上的差分商, 然后以多项式(如四次多项式)分段来拟合差分商曲线, 以此代替 C_{1n}, C_{2n} 的导函数. 在 φ 的实用范围内, 只要有适量的差分拟合点(如分别取 φ 点为 $0, 1, 2, -1, -2$), 则多项式分段拟合曲线就具有极高的精度. b_{1n}, b_{2n} 的导数也作同样处理. 无论 C_{1n}, C_{2n} 及 b_{1n}, b_{2n} 的表达式有多么复杂, 它们的导数都可由本文方法求得. 另外, 该法避免了像文献[1,3]那样推导 C_{1n}, C_{2n} 及 b_{1n}, b_{2n} 的导数的解析关系式的麻烦而可以直接求解.

3 结构节点的增量平衡方程

一般来说, 单元杆端力的增量是由单元变形的改变与单元刚体位移的变化而产生的, 因此, 单元的切线刚度矩阵由单元的形变切线刚度矩阵和单元的几何刚度矩阵组成. 可以求得整体结构的切线刚度矩阵, 其具体表达式为

$$\Delta F = K_T \Delta D \tag{9}$$

式中: ΔF ——结构节点力增量矢量; ΔD ——结构节点位移增量矢量; $K_T = \sum_{e=1}^N L_e (T_e^T k_e T_e + N_e) L_e^T$ (L_e 是坐标转换矩阵, N_e 是考虑结点大位移的几何刚度矩阵, T_e 是在单元局部坐标下由 6 个基本的杆端力求单元总的 12 个杆端力的转换矩阵, N 是单元结构总数目, L_e, N_e, T_e 的具体表达式见文献[2]).

4 非线性方程组的解法

本文采用控制位移增量的 Raphson-Newton 迭代法求解结构非线性方程.

5 数值算例

例 1 取一平面肘形刚架, 其材料物理参数 $E = 210 \text{ GPa}$. 本例中只考虑其几何非线性的性能. 在结构杆件截面 A 、跨度 L 取不同值的情况下, 比较剪切变形对结构力学性能的影响. 采用控制位移增量的 Raphson-Newton 迭代法求解结构的非线性方程. 由图 1 可看出: 肘形刚架在跨度 L 缩短、截面放大的过程中, 剪切变形的影响逐步增大. 随着结构变形的增大, 剪切变形的影响也随之加大.

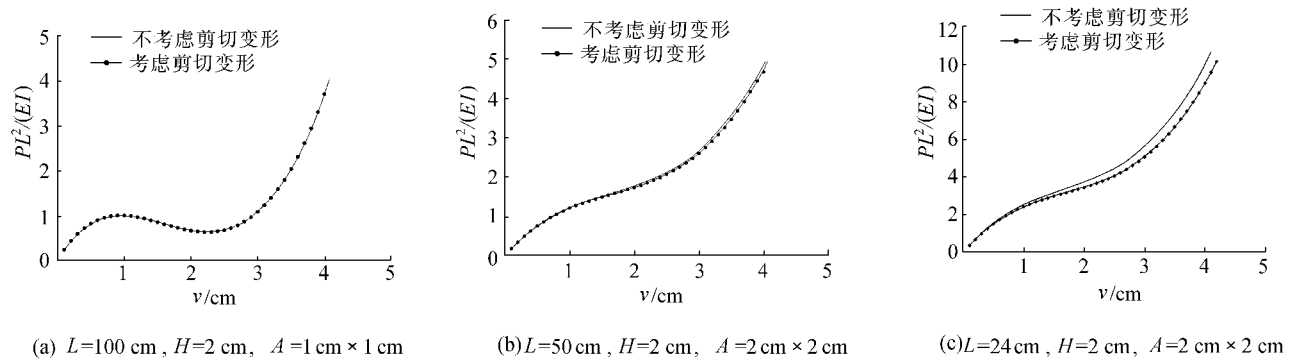


图 1 例 1 荷载-位移曲线
Fig.1 Load-displacement curve

例 2 取一正六边形空间刚架, 其 $E = 3.03 \text{ GPa}$, $G = 1.10 \text{ GPa}$. 本例中只考虑其几何非线性的性能. 在结构杆件截面 A 、跨度 L 取不同值的情况下, 比较剪切变形对结构力学性能的影响. 采用控制位移增量的 Raphson-Newton 迭代法求解结构的非线性方程.

由图 2 可看出: 正六边形空间刚架在杆件长度缩短、截面放大的过程中, 剪切变形的影响逐步增大. 随着结构变形的增大, 剪切变形的影响随之加大.

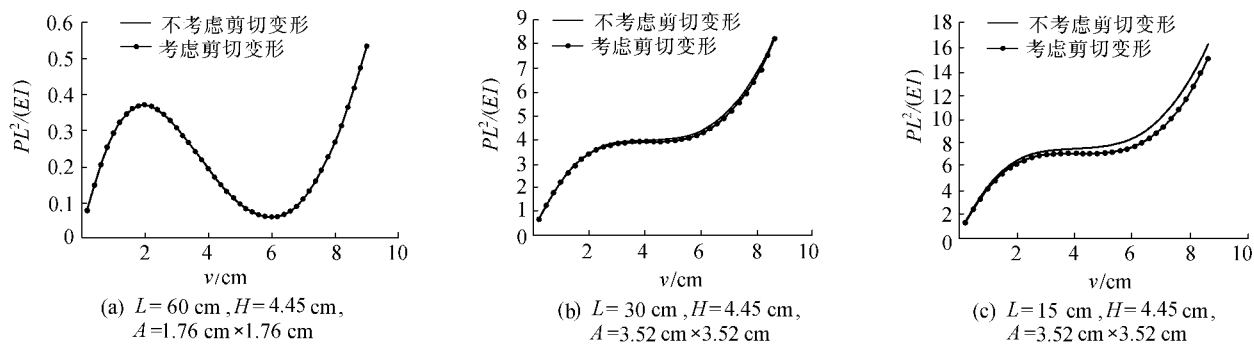


图 2 例 2 荷载-位移曲线
Fig.2 Load-displacement curve

6 结 论

- a. 本文所推导的考虑剪切变形影响的稳定函数模型的切线刚度是正确的,可用于实际结构的计算.
- b. 剪切变形对结构的影响,随着结构杆件单元高长比的增加、结构整体变形的加大而变大.
- c. 剪切变形对结构的影响,随着结构杆件轴力的加大而增大.

参考文献：

[1] ORAN C. Tangent stiffness in frames[J]. J Struct Div, 1973, 99(6) : 961—978.
[2] CHEN Siu-lai, ZHOU Zhi-hua. Pointwise equilibrating polynomial element for nonlinear analysis of frames[J]. J Struct Engrg, 1994, 120(6) : 1703 ~ 1717.
[3] KASSIMALI A. Large deformation analysis of elastic-plastic frames[J]. J Struct Engrg, 1983, 109(8) : 1869—1886.
[4] 川和郎著. 结构的弹塑性稳定内力[M]. 王松涛, 魏钢译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1992. 11—67.

Stability function element model considering shear deformation effects

XIA Yi-ming¹, WU Sheng-xing¹, XI Yao²

- (1. College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China ;
- 2. College of Civil Engineering, Southeast Univ., Nanjing 210096, China)

Abstract : An element tangent stiffness equation was derived based on the secant stiffness equation of stability function elements with shear deformation effects considered. In consideration of the fact that some elements in the tangent stiffness matrix were difficult to be solved in certain ranges, the interpolation and polynomial fitting methods were adopted for the tangent stiffness matrix. Examples show that the improved model is reasonable.

Key words : stability function element ; secant stiffness ; tangent stiffness ; shear deformation