

基于点-点单元的预应力混凝土结构仿真分析

潘晓明,张旭明,王德信

(河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 基于增量形式的有限元法,建立接触摩擦问题的等效单元刚度-约束矩阵和等效结点荷载向量,提出一种利用点-点接触摩擦单元来模拟预应力钢筋混凝土中钢绞线与混凝土三维非线性接触模型.该模型以结点位移和接触应力作为基本未知量,考虑固定、滑动和张开 3 种接触条件,可以模拟预应力筋与混凝土之间的摩擦和滑动、张开和闭合.可用标准的有限元法将单元刚度矩阵和单元荷载向量集成到总刚度矩阵和总荷载向量中,计算过程简单,结果合理.

关键词 预应力混凝土 仿真分析 接触摩擦单元

中图分类号 :TU378 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2003)02-0184-04

目前预应力混凝土结构设计中,预应力构件一般作为混凝土结构,预应力作为外荷载,运用材料力学方法和数值方法进行计算. Wilby^[1] 充分考虑预应力筋和混凝土的相互作用得出了弹性解析算法的理论.该理论导出的超越方程,求解不便,且仅适用于简单的预应力构件,无法与有限单元法相衔接.本文建立了基于点-点接触摩擦单元三维非线性接触摩擦问题的新模型.该模型以结点位移和接触应力作为基本未知量,考虑固定、滑动和张开 3 种接触条件,能模拟具有初始裂缝和无初始裂缝两物体间的滑动、张开和闭合.文中利用虚位移原理并考虑接触界面上的约束条件,建立接触摩擦问题的等效单元刚度-约束矩阵和荷载向量.并对无粘结预应力混凝土结构进行了计算.

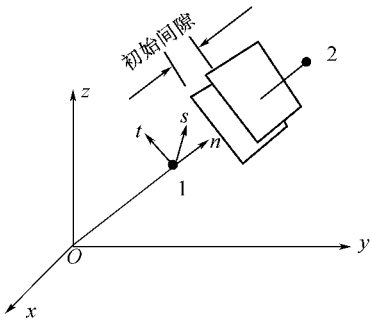


图 1 点-点接触单元

1 接触摩擦单元基本理论

1.1 接触摩擦单元的刚度矩阵

考察两物体的接触,用标准的有限元方法将其离散化.在相对应的点上,布置点-点接触单元.整个问题采用笛卡儿坐标系 x, y, z ,局部采用 n, s, t ,用于描述接触摩擦单元,见图 1.

运用虚位移原理有

$$\delta \mathbf{a}^T \mathbf{F} = \int_{\Gamma} (\delta A)^T \boldsymbol{\Sigma} d\Gamma \quad (1)$$

$$\mathbf{a} = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = [F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{z1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{z2}]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{A} = [\Delta u' \quad \Delta v' \quad \Delta w']^T = \mathbf{N} \Delta \mathbf{a}' \quad \Delta \mathbf{a}' = \mathbf{C} \mathbf{a} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_n \quad \tau_s \quad \tau_t]^T = \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} \quad (5)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$C = [-L \quad L] \quad L = \begin{bmatrix} l_{nx} & l_{ny} & l_{nz} \\ l_{sx} & l_{sy} & l_{sz} \\ l_{tx} & l_{ty} & l_{tz} \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中： $\Delta a, F$ ——整体坐标系中的增量结点位移向量和等效结点力向量； $\Delta A, \Sigma$ ——局部坐标系中的增量相对位移向量和增量接触应力向量； $\Delta a', \sigma$ ——局部坐标系中的增量结点相对位移向量和增量结点接触应力向量； N ——插值函数矩阵； C ——坐标转换矩阵； $l_{ij} (i = n, s, t; j = x, y, z)$ ——局部坐标轴 i 和整体坐标轴 j 之间的方向余弦。

将式(4), (5)代入式(1)中,得到接触摩擦单元的接触应力与接点力之间的关系为

$$C^T S \sigma = F \quad (8)$$

$$S = \int_{\Gamma} N^T N d\Gamma \quad (9)$$

1.2 接触面约束条件

在三维接触摩擦单元中,接触条件分为固定、滑动和张开三类. 其中固定指结点对闭合, 滑动指切向剪应力超过允许剪应力, 结点对之间有相对位移, 张开指结点对产生裂缝^[2]. 对应于不同的接触状态, 接触面上的位移和应力应满足不同的连续条件和约束条件. 图 1 的结点对, 其约束条件为

$$RL \begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \\ w_2 - w_1 \end{Bmatrix} + (I - R) \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{s1} \\ \tau_{t1} \end{Bmatrix} = R \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_{s1} \\ b_{t1} \end{Bmatrix} + (I - R) \begin{Bmatrix} N_1 \\ T_{s1} \\ T_{t1} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

式中： I ——三阶单位矩阵； $a_1, b_{s1}, b_{t1}, N_1, T_{s1}, T_{t1}$ ——指定的结点相对位移或接触应力, 与上一荷载步和当前计算步时结点对所处的接触状态有关； R ——对角矩阵, 定义如下：

$$R = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中 m_1, m_2 和 m_3 与当前计算步结点对所处的接触状态有关. 固定状态 $m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1$ ；滑动状态 $m_1 = 1, m_2 = 0, m_3 = 0$ ；张开状态 $m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = 0$.

故约束方程可写成

$$RCa + (I - R) \sigma = Q \quad (12)$$

1.3 接触摩擦单元等效劲度-约束矩阵

由式(8), (12)得

$$\begin{bmatrix} 0 & C^T S \\ RC & I - R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ \sigma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (13)$$

令

$$K_c = \begin{bmatrix} 0 & C^T S \\ RC & I - R \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$f_c = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (15)$$

K_c, f_c 分别为等效单元劲度-约束矩阵和等效单元荷载向量, 可用标准的有限元集成方法叠加到总劲度矩阵和总荷载向量中去.

2 接触问题的求解

接触问题要经多次迭代才能获得正确解.

2.1 正确状态的确定

计算时, 首先假设单元处于某种接触状态, 如固定、滑动或张开. 按照假定的状态, 分别计算单元劲度矩阵和等效荷载向量, 解有限元方程后得到一组试验解. 将试验解进行接触状态检查, 看其是否与原接触状态相同, 如果相同, 则说明假设正确, 相应的解即为正确解. 如不同, 则选择试验解作为新的接触状态, 重新计算

单元劲度矩阵和荷载向量,进行新一轮的迭代,直到收敛^[3].

2.2 主要计算步骤

假设在荷载步 K ,已进行第 $i-1$ 次迭代,现考察第 i 次的情况:(a)假设经第 $i-1$ 次迭代后求得的接触状态为正确状态,按式(14)计算等效单元劲度约束矩阵.(b)根据假设的约束状态,按表 1 和式(15)形成等效单元荷载向量.(c)将等效单元劲度-约束矩阵和单元荷载向量分别叠加到总劲度矩阵和总荷载向量中去.(d)求解有限元方程,得到增量位移 a_i 和增量接触应力 σ_i .(e)计算总位移和总应力

$$\begin{aligned}a_i^K &= a^{K-1} + a_i \\ \sigma_i^K &= \sigma^{K-1} + \sigma_i\end{aligned}$$

(f)按表 2 对每一结点对选择新的接触状态.(g)检查新的接触状态是否与原接触状态相同,如相同,继续下一荷载步 如不同,转(a),进行新一轮的迭代.

表 1 相对结点位移向量 $\hat{a}$ 和结点接触应力向量 $\hat{Q}$

Table 1 Displacement vector $\hat{a}$ and contact stress vector $\hat{Q}$ at relative node

荷载步 $K-1$	荷载步 K		
	固定	滑动	张开
固定、滑动	$a = 0, b_s = 0, b_t = 0$	$a = 0, T_s = a\tau_s^K - \tau_s^{K-1}, T_t = a\tau_t^K - \tau_t^{K-1}$	$N = -\sigma^{K-1}, T_s = -\tau^{K-1}, T_t = -\tau_t^{K-1}$
张 开	$a = -(\Delta u')^{K-1} - g, b_s = (\Delta v')_i \left \frac{a}{(\Delta u')_i} \right , b_t = (\Delta w')_i \left \frac{a}{(\Delta u')_i} \right $	$a = -(\Delta u')^{K-1} - g, T_s = a\tau_s^K, T_t = a\tau_t^K$	$N = 0, T_s = 0, T_t = 0$

表 1 和表 2 中: $\sigma^{K-1}, \tau_s^{K-1}, \tau_t^{K-1}, (\Delta u')^{K-1}$ 分别表示荷载步 $K-1$ 时,局部坐标系中的法向接触应力、沿 s 和 t 方向的切向剪应力及法向相对位移; g 为沿法线方向的初始裂缝; $(\Delta u')_i, (\Delta v')_i, (\Delta w')_i$ 分别为荷载步 K 当前迭代步 i 时,局部坐标系中沿 n, s, t 方向的增量相对位移; $[\sigma]$ 为局部坐标系中法线方向的容许应力; σ_i^K, τ_i^K 分别为荷载步 K 当前迭代步 i 时,局部坐标系中的法向接触应力和切向剪应力;

表 2 接触状态判据

Table 2 Contact status criterion

迭代步 $i-1$	迭代步 i		
	固定	滑动	张开
固定	$\sigma_i^K < [\sigma], \tau_i^K < [\tau]$	$\sigma_i^K < [\sigma], \tau_i^K \geq [\tau]$	$\sigma_i^K \geq [\sigma]$
滑动	$\sigma_i^K < [\sigma], (\Delta s')_i < \epsilon$	$\sigma_i^K < [\sigma], (\Delta s')_i \geq \epsilon$	$\sigma_i^K \geq [\sigma]$
张开	$(\Delta u')_i + g < 0$		$(\Delta u')_i + g \geq 0$

$$(\Delta s')_i = \sqrt{(\Delta v')_i^2 + (\Delta w')_i^2} \tag{16}$$

$$a = [\tau] / \sqrt{(\tau_s^K)^2 + (\tau_t^K)^2} \tag{17}$$

ϵ 为给定的精度,可取 $\epsilon = 0.001 \text{ m}$.

结点对处于固定状态的条件是

$$\sigma_i^K < [\sigma] \quad \tau_i^K < [\tau] \quad \tau_i^K = \sqrt{(\tau_s^K)^2 + (\tau_t^K)^2} \tag{18}$$

处于滑动状态的条件是

$$\sigma_i^K < [\sigma] \quad \tau_i^K > [\tau] \tag{19}$$

在切面上的滑动方向可由下式确定:

$$\tan \beta = (\tau_t^K)_i / (\tau_s^K)_i \tag{20}$$

处于张开状态的条件是

$$\sigma_i^K \geq [\sigma] \tag{21}$$

3 算 例

算例 1 如图2所示,上下两个接触摩擦块,下块底部固定,上块上部受均布力 $Q = 100 \text{ kPa}$,上块底部受均布侧向力 τ ,材料系数 $c = 0, \varphi = 45^\circ, E = 30 \text{ GPa}, \nu = 0.25$.

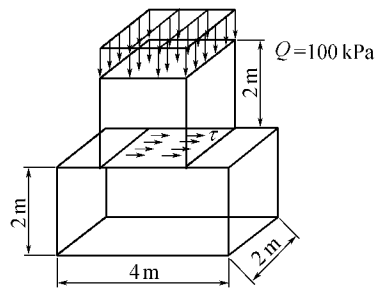


图 2 接触摩擦块
Fig.2 Contact friction block

计算结果与解析解的比较如表 3 所示.由表 3 可知,数值解与解析解比较吻合.

算例 2 如图3所示,一根矩形截面梁,宽为 0.3 m,配外形为抛物线形的 12 根 $d = 28.58\text{ mm}$ 钢绞线预应力筋后加张力,求梁在自重作用下的挠度.钢绞线全部预应力取 $p = 4\,022\text{ kN}$.混凝土杨氏模量取 $E_c = 3.447\,5 \times 10^4\text{ MPa}$,预应力钢绞线弹性模量 $E_s = 1.8 \times 10^5\text{ MPa}$,梁容重 $\gamma = 2.4 \times 10^4\text{ N/m}^3$.摩擦单元 $c = 0$,内摩擦角 $\varphi = 30^\circ$,E 点为张拉端,A 点固定.

几种计算模型挠度计算结果比较如表 4 所示.本文计算出的预应力损失值与我国建筑规范^[4]中推导的理论计算公式的计算值的比较如表 5 所示.

表 4 挠度解算结果			
Table 4 Calculated results of flexibility			
计算方法	解析解	本文计算模型	集中力模型
跨中挠度/mm	24.3	23.9	28.9

4 结 语

本文建立了点-点接触摩擦单元的等效劲度-约束矩阵和等效单元荷载向量,在程序设计中,接触单元的贡献可用常规的有限元集成方法叠加到总劲度矩阵和总荷载向量中去.该模型可用来模拟相同网格划分的面-面接触、面-线接触、线-线接触,因而具有较高的通用性.

参考文献:

[1] WILBY C B 著.后张法预应力混凝土[M].徐晓初译.北京:中国铁道出版社,1985.195—206.
[2] 雷晓燕.接触摩擦单元的理论 and 应用[J].岩土工程学报,1994,16(3): 23—32.
[3] 孙林松,王德信,谢能刚.接触问题有限元分析方法综述[J].水利水电科技进展,2001,21(3): 18—20.
[4] 中国建筑工业出版社.现行建筑结构规范大全(修订缩印本)[M].北京:中国建筑工业出版社,1994.272—275.

Point-to-point element based simulation of pre-stressed concrete

PAN Xiao-ming, ZHANG Xu-ming, WANG De-xin

(College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: Based on the incremental FEM, by establishment of stiffness-constraint matrixes for equivalent elements and loading vectors at equivalent nodes, a 3-D non-linear contact model was developed for simulation of the contact-friction interaction between pre-stressed bars and pores in concrete structure by use of the point-to-point contact element. With the displacement and contact stress at nodes unknown, the model can simulate the friction, sliding, opening, and closing between pre-stressed bars and pores under fixed, sliding, and opening contact conditions. Besides, the element stiffness matrixes and loading vectors can be integrated into the general stiffness matrix and the total loading vector by use of the conventional FEM. The process of calculation is simple and the calculated result is reasonable.

Key words: pre-stressed concrete; simulation analysis; contact friction element

表 3 数值解与解析解的比较

解析解		数值解	
稳定	滑动	稳定	滑动
$0 \leq \tau \leq 100\text{ kPa}$	$100\text{ kPa} \leq \tau$	$0 \leq \tau \leq 99.8\text{ kPa}$	$99.8\text{ kPa} \leq \tau$

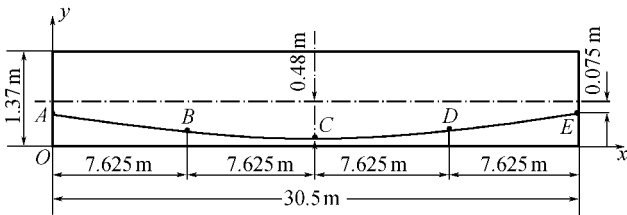


图 3 矩形截面梁

Fig.3 Rectangular section beam

表 5 摩擦应力损失比较

点号	A	B	C	D	E
本文计算值	0	7.4	16.0	24.6	32.1
规范理论解	0	7.9	15.8	23.5	31.1