

弯矩分配传递极限公式在薄板弯曲问题中的应用

徐汉忠¹, 谢桂华², 律海燕¹

(1. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098 ; 2. 苏州市交通工程质量监督站, 江苏 苏州 215003)

摘要 : 用传统的弯矩分配法求解任意荷载作用下的薄板弯曲问题 , 将杆端弯矩表示为多次分配弯矩和传递弯矩之和 , 得到了当分配传递次数无穷大时其表达式为公比小于 1 的无穷等比级数的和的形式 , 并求得了该和的表达式即极限公式 . 该极限公式便于编程电算 , 可方便地应用于任意荷载作用下的薄板弯曲问题 .

关键词 : 薄板弯曲 ; 位移法 ; 弯矩分配法

中图分类号 : TB121 ; TU311.1 文献标识码 : A 文章编号 : 1000-198X(2003)02-0193-03

单块薄板弯曲问题通常通过查表求内力 , 连续等跨双向板通常简化为单块板进行计算 , 连续不等跨双向板则需用有限元法进行求解 . 为简化计算和便于编程 , 本文用弯矩分配传递极限公式^[1~4]求解任意连续不等跨双向板 . 其中弯矩分配传递极限公式是指有 3 个可动结点的连续梁或刚架弯矩分配传递无限次后的杆端弯矩公式 .

1 公式推导和算例

图 1 所示连续板 , 周边简支 , 受均布荷载 q 作用 , 欲求支座弯矩 .

1.1 求固端弯矩和结点不平衡力矩

固端弯矩 M_{1a}^F 为将板 13ab 视为两边简支、两边固定、边 1 中点的弯矩 , 查表^[5]得 $M_{1a}^F = 1.1968q$, 固端弯矩 M_{1d}^F 为将板 12dc 视为两边简支、两边固定、边 1 中点的弯矩 , 查表^[5]得 $M_{1d}^F = -1.0832q$. 结点 1 不平衡力矩为 $m_{1T} = M_{1a}^F + M_{1d}^F = 0.1136q$. 同理 , 可求得其余结点不平衡力矩 . 下面仅以只有结点 1 作用的不平衡力矩 m_{1T} 的情况为例 .

将固端弯矩及查表获得的弯矩分配系数 D 和传递系数 C ^[6]列于表 1 中 .

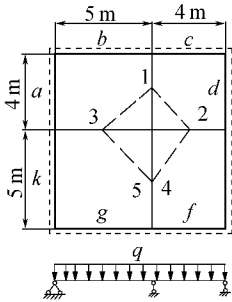


图 1 连续板
Fig.1 Continuous plate

表 1 固端弯矩、分配系数和传递系数

Table 1 Fixed end bending moment , distribution factor and carryover factor

结点号	下标	M^F	D_{ij}	C_{ij}	结点号	下标	M^F	D_{ij}	C_{ij}
2	21	略	0.561	0.293	3	31	略	0.507	0.353
2	24	略	0.439	0.220	3	35	略	0.493	0.293
1	13	$1.197q$	0.439	0.220	4, 5	42	略	0.507	0.353
1	12	$-1.083q$	0.561	0.293	4, 5	53	略	0.493	0.293

1.2 不平衡力矩 m_{1T} 作用下的极限公式

对于不平衡力矩 m_{1T} 作用下的问题 , 用三结点同时分配和传递的弯矩分配的极限公式^[2,3]列表进行计算 , 计算过程绘于图 2 中 . 图 2 为同时放松边 1, 2, 3 而将边 4 (边 4 和边 5 为同一边) 固定的情况 . 边 2 分配后传递至 4 的弯矩为 $C_{24}D_{24}C_{12}D_{12}m_1^*$, 边 3 分配后传递至 5 的弯矩为 $C_{35}D_{35}C_{13}D_{13}m_1^*$. 这两个弯矩未表示在图 2 中 , 因为它们是一微量 , 分配后不再传递 . 图 2 中 ,

$$g_{12} = C_{12} C_{21} D_{12} D_{21} \qquad g_{13} = C_{13} C_{31} D_{13} D_{31} \tag{1}$$

g_{12} 为板件 12 的两端的分配系数 $D_{12} D_{21}$ 和双向传递系数 $C_{12} C_{21}$ 的乘积, g_{13} 为板件 13 的两端的分配系数 $D_{13} D_{31}$ 和双向传递系数 $C_{13} C_{31}$ 的乘积, 称之为板件性质系数. G_1 为 1 结点的性质系数, 可由 13 板和 12 板的板件性质系数求得, 即

$$G_1 = 1/(1 - g_{12} - g_{13}) \tag{2}$$

结点 1 的总不平衡力矩 m_{1T} 乘以结点 1 性质系数 G_1 为结点 1 的等效不平衡力矩 m_1^* ,

$$m_1^* = m_{1T} G_1 \tag{3}$$

本例中, 杆件性质系数

$$g_{12} = D_{12} D_{21} C_{12} C_{21} = 0.561^2 \times 0.293^2 = 0.0270$$

$$g_{13} = D_{13} D_{31} C_{13} C_{31} = 0.507 \times 0.439 \times 0.22 \times 0.353 = 0.0173$$

节点性质系数 $G_1 = 1/(1 - g_{13} - g_{12}) = 1/(1 - 0.0270 - 0.0173) = 1.0464$

源点等效不平衡力矩 $m_1^* = m_{1T} G_1 = 0.1136q \times 1.0464 = 0.1189q$

图 2(a)所示为计算公式, 图 2(b)所示为本例计算结果. 图 2 中支座左右两边的弯矩绝对值相等. 分析表明, 计算结果是正确的.

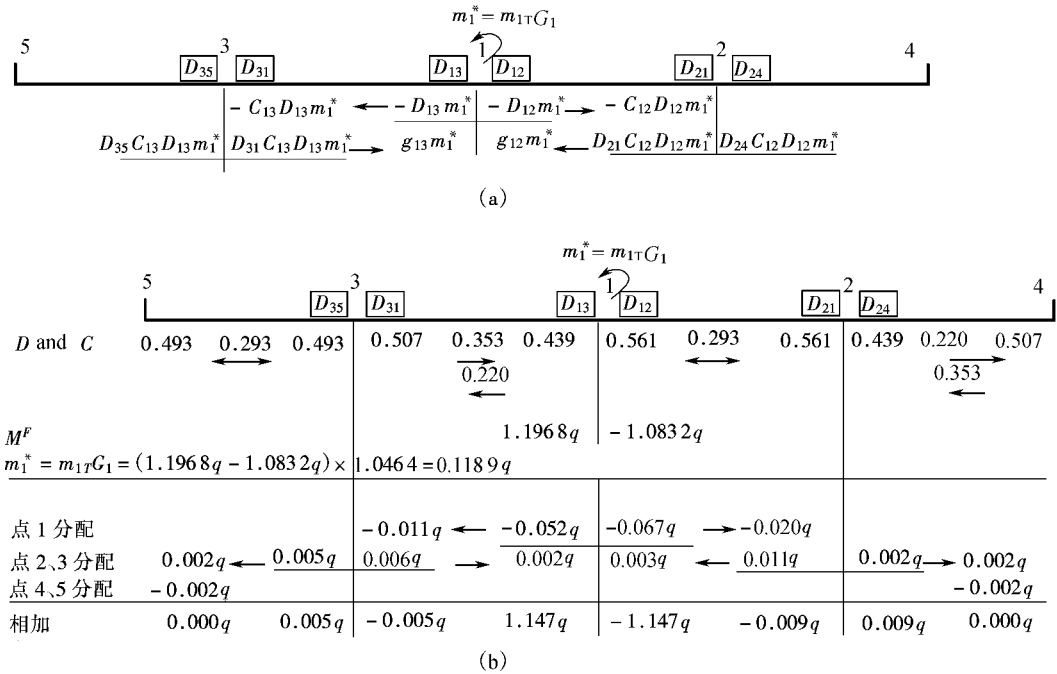


图 2 采用极限公式的弯矩分配法

Fig.2 Limit formula-based moment distribution method

2 推广和求解步骤

图 1 所示为 4 跨板, 下面讨论和推广到两个方向都是任意跨的情况. 求解步骤如下 (a)求任意荷载作用下的各板边中结点固端弯矩, 进而求各板板边中结点不平衡力矩 (b)分别求各板板边中结点不平衡力矩作用下的解, 即各板(板边中点)端弯矩 (c)叠加由 (b)步得到的各解得最后解. 下面先给出一些定义, 然后讨论上述 (b)步, 求解只有一个板边中结点作用外加不平衡力矩的情况.

2.1 定义

a. 结点定义. 将外加不平衡力矩作用的板边中结点称为源点, 设源点为 s , 不平衡力矩用 m_s 表示, 和源点相邻的板边中点称为源点的邻点, 设为 a .

b. 板件性质系数的定义. 对源点 s 和源点的邻点 a , 定义板件性质系数 g_{sa} 为

$$g_{sa} = g_{as} = D_{sa} C_{sa} D_{as} C_{as} \tag{4}$$

c. 结点性质系数的定义. 对于源点 s , 定义结点性质系数 G_s 为

$$G_s = 1 / (1 - \sum g_{sa}) \tag{5}$$

其中 $\sum g_{sa}$ 表示源点和所有邻点板件性质系数相加.

d. 源点等效不平衡力矩 m_s^* 定义为

$$m_s^* = m_s G_s \tag{6}$$

其中 G_s 由式(5)表示.

2.2 求解步骤

a. 将等效不平衡力矩 m_s^* 作用于源点 s , 在源点 s 对 m_s^* 分配后传递至所有邻点 a , 得 s 端分配弯矩 m_{sa}^D 和 a 端传递弯矩 m_{as}^C .

b. 对传递至邻点 a 的弯矩 m_{as}^C , 在 a 结点分配后传递至源点 s 和 a 结点的邻点 r , 对传递至 r 点的弯矩 , 因在 r 点分配后弯矩很小而不再传递.

c. 将分配弯矩和传递弯矩相加得板端弯矩.

以上 3 个求解步骤可表述为 : 将 m_s^* 作用于源点 s , 用通常的弯矩分配法进行如下的分配传递 , 在源点对等效不平衡力矩 m_s^* 分配后传递到邻点 , 在邻点 r 分配后传递到源点和该邻点的邻点 r , 在 r 点分配后不再传递. 该求解步骤类同于刚架^[4].

3 结 论

传统的弯矩分配法 , 将杆端弯矩表示为多次分配弯矩和传递弯矩之和 , 当分配传递次数无穷大时 , 其表达式为公比小于 1 的无穷等比级数的和 , 从而可方便地求得该和的表达式即极限公式. 本文将极限公式应用于任意荷载作用下的薄板弯曲问题 , 所得公式便于编程电算.

参考文献 :

[1] 武汉水利电力学院建筑力学教研室. 结构力学[M]. 北京 : 水利电力出版社 , 1960. 197—206.
[2] 徐汉忠. 结构力学中结点不平衡力矩分配传递的极限公式[J]. 河海大学学报 , 1997 , 25(6) : 60—64.
[3] 徐汉忠. 任意多跨连续梁的新弯矩分配法[J]. 工程力学 , 2001(增刊) : 392—396.
[4] 徐汉忠 , 刘宁 , 李海峰. 竖向荷载作用下高层框架的一种新的计算方法[J]. 河海大学学报(自然科学版) , 2002 , 30(2) : 54—57.
[5] 建筑结构静力计算手册编写组. 建筑结构静力计算手册[M]. 北京 : 中国建筑工业出版社 , 1974. 288—352.
[6] 王秀逸 , 张平生. 特种结构[M]. 北京 : 地震出版社 , 1997. 257—258.

Application of bending moment distribution and carryover limit formula
to plate bending problems

XU Han-zhong¹ , XIE Gui-hua² , LU Hai-yan¹

(1. College of Civil Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China ;

2. Suzhou Communication Engineering Quality Supervision Department , Suzhou 215003 , China)

Abstract : The conventional bending moment distribution method was adopted to solve the plate bending problem. The total moment on the ends of the member was obtained by summing up of infinitely distributed and carried-over bending moments , and the expression is the sum of an infinite series with the common ratio less than 1 . Further deduction of the expression forms a limit formula. The formula can be easily programmed , providing another convenient method for the bending problem of plates under arbitrary loads.

Key words : plate bending ; displacement method ; bending moment distribution method