

结构系统可靠度优化初探

方从严,刘 宁,秦忠国

(河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 通过对以结构系统具有最低材料重量或成本为目标函数、以系统可靠度为约束条件的优化模型的分析,确定了其优化准则,给出基于可靠度下结构处于最优状态的条件,即当结构处于最优状态时,每一设计变量的改变量所引起的系统整体可靠度收益(或损失)与其质量增加(或减少)的比值应都等于某一常数;在此基础上,提出分结构调优和解优两阶段的直接迭代法进行求解,并给出算例。

关键词 结构系统;可靠度;优化

中图分类号:TU311.2 文献标识码:A 文章编号:1000-1980(2003)03-0291-04

各种工程设计的理论和方法的最终目的都是为了寻求一种令人满意的设计方案。优化的目标是使设计方案在具有良好使用功能条件下,获得最好的近期和远期的经济和社会效益。根据工程实际的需要,按照经济 and 安全的准则,以确定论的思想方法设计结构,是通常意义下结构设计的目的。而结构安全的含义应从概率意义上来理解才更符合实际。人们基于这一思想寻求结构元件最优解的合理方法,就是可靠度优化方法。传统的确定论的优化设计过程是在一组约束条件下,使目标函数取最大或最小值。这里无论是目标函数还是约束条件都没有与可靠度的概念联系起来,不免存在一些缺陷:首先,经传统的结构设计得出的最优结构不能保证结构所必需的可靠性水平;其次,传统结构设计为使目标函数最大(或最小),忽视了构件尺寸及材料性能参数的随机性,其结果往往安全余度等级较低,从可靠度角度分析,它们是不尽合理的。因此,应把结构的可靠度要求加入到结构优化模型之中,在结构可靠性分析的基础上进行结构优化设计。然而,与常规的结构优化设计相比,结构可靠度优化设计的难度要大得多,目前大部分工作多集中于单工况下,基于元件可靠度的尺寸优化这一层次,从结构系统可靠度的观点看,满足元件可靠度约束条件的优化设计,往往并不是满足系统可靠度约束的最佳设计;在基于系统可靠度的优化设计方面,因系统可靠度计算的复杂性,进行系统优化时对其直接进行计算非常困难,目前的相关研究大多从构造一些近似公式入手,由于这些公式中有关系数的确定十分困难,或者公式本身的近似程度有待探讨,因此都难以应用于实际。

本文基于上述优化模型,针对结构内各元件或失效模式相互独立(或相关性较小)的串联系统,探讨了系统处于最优状态的条件,据此提出分系统调优和解优两阶段直接迭代法进行求解。

1 优化模型及准则

基于系统可靠度的优化模型有多种。这里以系统可靠度为约束条件,并且限制构件尺寸,以系统具有最低材料重量或成本为目标函数,建立如下数学模型:

find

X

min

$W(X)$

s. t.

$\psi = \psi^*$

$x_j \geq x_j^l$

$j = 1, 2, \dots, m$

$l = 1, 2, \dots, q$

}

(1)

式中: X ——设计变量向量; x_j^l ——变量 x_j 的下限值; m ——设计变量总数; q ——变量类型总数; $W(\cdot)$ ——目标函数,常取为材料重量或成本; n ——约束函数的个数; ψ ——系统可靠度; ψ^* ——规定的系统可靠度。

设 R_i 代表元件或失效模式 i 的抗力, S_i 代表相应的荷载效应, 则正常工作的判断准则为 $R_i \geq S_i$. 若 R_i 和 S_i 分别看做正态变量 $N(m_{R_i}, \sigma_{R_i})$ 和 $N(m_{S_i}, \sigma_{S_i})$ (对于非正态的情况, 可进行正态化处理), 则元件或失效模式 i 的可靠度为^[1]

$$\psi_i = P(R_i \geq S_i) = \Phi(\beta_i) \quad \beta_i = \frac{m_{R_i} - m_{S_i}}{\sqrt{\sigma_{R_i}^2 + \sigma_{S_i}^2}} \quad (2)$$

则

$$\phi_i = \Phi(\beta_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\beta_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (3)$$

式中: β_i ——元件 i 的可靠指标; m ——随机变量的均值; σ ——随机变量的标准差; $P(\cdot)$ ——事件 $R_i \geq S_i$ 成立的概率; Φ ——概率分布函数.

当采用 PNET 法求系统的可靠度时^[1,2], 首先寻求系统的主要失效模式, 并假定系统的主要失效模式间是相互独立(或相关性较小, 可以忽略), 则系统可靠度

$$\psi = \prod_{i=1}^n \phi_i \quad (4)$$

引入 Lagrange 乘子 λ 构造函数^[3]

$$L = W(X) + \lambda(\psi^* - \psi) \quad (5)$$

如果 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}^T$ 为该优化模型的解, 则其必满足:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial W}{\partial x_j} - \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_j} & \begin{cases} \geq 0 & \text{当 } x_j = x_j^l \\ = 0 & \text{当 } x_j > x_j^l \end{cases} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \psi(X) - \psi^* \end{cases} \quad (6)$$

显然, 当 $x_j > x_j^l$ 时, 有

$$\frac{\partial W}{\partial x_j} - \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0 \quad (7)$$

令 $\mu = \frac{1}{\lambda}$, 即有

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} / \frac{\partial W}{\partial x_j} = \mu \quad (8)$$

式(8)表明, 当结构系统处于最优状态时, 每一设计变量的改变量所引起的系统整体可靠度收益(或损失)与质量增加(或减少)的比值应都等于某一常数^[4]. 这就为求解这一优化模型提供了一个理论依据, 据此可首先进行结构调优, 寻求其无约束下的最优状态, 然后再逼近其约束条件, 从而得到该优化问题的最优解.

2 结构调优

在该阶段, 不考虑结构系统可靠度的约束, 直接根据前述的理论寻求系统的最优状态. 设第 j 个设计变量 x_j 改变量为 $\Delta x_j^k = x_j^{k+1} - x_j^k$ (k 为迭代次数), 其余设计变量不变, 则目标函数改变:

$$\frac{\Delta W_j^k}{\Delta x_j^k} = \frac{W(x_j^{k+1}) - W(x_j^k)}{x_j^{k+1} - x_j^k} \quad k = 0, 1, \dots \quad (9)$$

式中: ΔW_j^k ——因第 j 个设计变量 x_j 的第 k 次改变而引起的目标函数的增量; $W(x_j^k)$ ——对设计变量 x_j 进行第 k 次迭代时的目标函数值. 其约束函数改变:

$$\frac{\Delta \phi_j^k}{\Delta x_j^k} = \frac{\phi(x_j^{k+1}) - \phi(x_j^k)}{x_j^{k+1} - x_j^k} \quad (10)$$

式中: $\Delta \phi_j^k$ ——因第 j 个设计变量 x_j 的第 k 次改变而引起的系统可靠度的增量; $\phi(x_j^k)$ ——对设计变量 x_j 进行第 k 次迭代时的系统可靠度. 当第 j 个设计变量有第 k 次增量时, 系统可靠度增量和系统重量(或成本)的增量的比值

$$\mu_j^k = \frac{\Delta \phi_j^k / \Delta x_j^k}{\Delta W_j^k / \Delta x_j^k} = \Delta \phi_j^k / \Delta W_j^k \quad (11)$$

搜索沿 μ_j^k 绝对值最大和最小两个方向同时进行, 具体如下:

- a. 给设计变量一初值 $X^0 = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0\}^T$;
- b. 计算系统可靠度 ψ ;
- c. 分别给每一设计变量一增量 Δx_j^k ,同时保持其它设计变量不变 ,计算相对各设计变量的 μ_j^k 值 ;
- d. 找出所有 μ_j^k 值中的最大和最小值 $\mu_{j_1}^k, \mu_{j_2}^k$ (j_1, j_2 表示对应于 μ_j 最大和最小值的设计变量的编号) ;
- e. 如果满足 $|\mu_{j_1}^k - \mu_{j_2}^k| \leq \varepsilon_1$ (ε_1 为迭代控制精度)时 ,则按式 (8) 的结论 ,系统内各结构被调到最优化状态 ,否则令 $x_{j_1}^k = x_{j_1}^{k-1} + \Delta x_{j_1}^k, x_{j_2}^k = x_{j_2}^{k-1} - \Delta x_{j_2}^k$,回到 b ;
- f. 在系统被调至最优状态时 ,如果系统可靠度满足 $\psi = \psi^*$ 或 $|\psi - \psi^*| \leq \varepsilon_2$,对应 $W(X)$ 即是最优值 ,相应的 X 即是最优解 ,否则转入下一阶段 .

3 解 优

当系统内各结构元件被调至最优状态后 ,其系统可靠度一般并不满足 $|\psi - \psi^*| \leq \varepsilon_2$,则此时 $W(X)$ 及 X 都不是所求的最优值和最优解 ,应进一步寻求其最优解 .该阶段 ,在前面已求得的最优状态的基础上 ,通过迭代求得新的最优状态和对应的系统可靠度 ,来逼近系统的可靠度约束 ,从而获得该优化问题的解答 .

任选一设计变量(如选 $N_{0.1}$)给 x_1 一增量 Δx_1^k , Δx_1^k 的正负性由 $\psi - \psi^*$ 差值的正负性决定 ,按式 (11) 求出因 x_1 的改变而产生的 μ_1^k ,为保持其最优状态 ,令 $\mu^k = \mu_1^k$ (μ^k 为第 k 次迭代时的 μ 值) ,求出其余设计变量的增量 ,这样就完成了一个迭代步 .如此继续 ,直至所得的设计变量的值满足 $\psi = \psi^*$ 或 $|\psi - \psi^*| \leq \varepsilon_2$ 时为止 .具体如下 :

- a. 给 x_1 的第 k 次迭代的增量 Δx_1^k ,求 $\mu_1^k, \mu_1^k = (\Delta \phi_1^k / \Delta x_1^k) (\Delta W_1^k / \Delta x_1^k)$;
- b. 令 $\mu^k = \mu_1^k$,求出该迭代步其余设计变量的增量及该变量值 $\Delta x_j^k, x_j^k = x_j^{k-1} + \Delta x_j^k$;
- c. 求出 $\{x_1^k, x_2^k, \dots, x_m^k\}^T$ 对应的系统可靠度 ψ^k ;
- d. 若 $|\psi - \psi^*| \leq \varepsilon_2$ 满足 ,则 $\{x_1^k, x_2^k, \dots, x_m^k\}^T$ 即为满足约束的最优解 ,在此变量下 $W(X)$ 即是所求最优值 ;
- e. 若 $|\psi - \psi^*| \leq \varepsilon_2$ 不满足 ,回到 a .

4 算 例

如图 1 所示的悬臂梁 ,梁长 $L = 500\text{ mm}$,断面为 $b \times h$,材料容重 γ .该设计优化问题是使梁的重量最小 ,故其目标函数取为梁的重量 :

$$W(b, h) = \gamma Lbh$$

该悬臂梁必须同时满足固定端截面的强度和 A 点的挠度均不超过允许值这两个条件 ,故其系统失效模式由两个失效模式串联而成 .对应的极限状态函数



图 1 悬臂梁结构
Fig.1 Cantilever beam

$$g_1 = R_L - \frac{6PL}{bh^2} \qquad g_2 = \Delta_L - \frac{4PL^3}{Ebh^3}$$

式中 : R_L ——材料的屈服强度 ; Δ_L ——图中 A 点的允许挠度 ; E ——材料的弹性模量 ; P ——作用于 A 点的静载 .经试算 ,两失效模式间的相关系数不超过 0.3 ,可假定其相互独立 ,其系统可靠度

$$\psi = P(g_1 \geq 0 \cap g_2 \geq 0) = P(g_1 \geq 0) \times P(g_2 \geq 0)$$

规定其系统可靠度 $\psi^* = 0.999$;尺寸限制为 : $b \geq 20\text{ mm}$, $h \geq 30\text{ mm}$,材料容重 $\gamma = 76.44\text{ kN/m}^3$.随机变量有 4 个 ,参数特性见表 1 ,用本文所提出的方法获得的优化结果见表 2 .迭代控制精度取为 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 \times 10^{-6}$).

表 1 随机变量参数
Table 1 Random variables

随机变量	R_L /MPa	Δ_L /mm	P/N	E /MPa
均值	215.00	4.00	1900	2.06×10^5
标准差	15.05	0.18	285	2.06×10^4

注 :概率函数类型为正态分布 .

表 2 优化结果
Table 2 Optimal results

结果	b/mm	h/mm	ψ	W/g
调优	20	47	0.99974	3588
解优	20	46	0.99904	

参考文献:

- [1] 吴世伟. 结构可靠度分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 1987. 77—81.
- [2] 赵会香, 吴胜兴, 夏颂佑. 钢筋混凝土结构构件体系可靠度分析[J]. 河海大学学报(自然科学版) 2000, 28(3): 111—117.
- [3] 江爱川. 结构优化设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 1986. 130—150.
- [4] 李鸿晶, 冯启民. 框架结构抗震可靠度优化的模型和准则[J]. 地震工程和工程振动, 1998, 18(3): 1—7.

Reliability-based structural system optimization

FANG Cong-yan, LIU Ning, QIN Zhong-guo

(College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: An optimal criterion for structural systems is formulated by analysis of the optimal model with the minimum weight and cost of materials taken as the objective function and the reliability of the system as the restraint condition. Furthermore, the condition for the reliability-based optimum state of the structure is given: the ratio of reliability benefit or loss to the improvement or decline of the quality of the whole system induced by the variation of a designed variable should be a constant. Based on the above work, a two-stage direct iteration method is proposed for solving the optimal model, and an example is also given.

Key words: structural system; reliability; optimization

《河海大学学报(自然科学版)》征订启事

《河海大学学报(自然科学版)》是以水资源开发、利用与保护为重点的综合性学术期刊,主要刊登本校在水资源、水文、地质、测量、水利工程、水电工程、水运工程、海洋及海岸工程、水工结构、工程力学、水力学及河流动力学、岩土工程、计算机科学、电力工程、电子技术及自动化工程、工业与民用建筑、管理工程、水利经济、环境工程、机械工程等学科方面的科研成果、学术论文、学术讨论、研究动态等学术性文章,可供上述有关专业的科技工作者及大专院校师生阅读和参考。

本刊创办于1957年,是我国中文核心期刊,在国内工程技术界和学术界有较大影响。刊载的文章中,有不少国家科技攻关(重点)项目和各种自然科学基金资助项目的研究成果,部分达到了国内领先和国际先进水平,为我国水利、水电、水运工程及其他有关工程建设的规划、设计、施工和管理提供了科学理论、方法和具体建议,发挥了较大的社会效益和经济效益,深受工程界和科技界赞许,并获得全国优秀高校自然科学学报二等奖,以及中国期刊方阵“双效期刊”、全国水利系统优秀期刊称号。

本刊每逢单月出版,国内外公开发行,邮发代号28-63,每期定价3.00元,全年订费48.00元。欢迎广大读者在全国各地邮局订阅或直接与编辑部联系。联系地址:南京市西康路1号《河海大学学报(自然科学版)》编辑部,邮政编码210098。