

迭代函数系统及其不可确定性的探讨

张正兰¹, 张晓峰¹, 李国建²

(1. 河海大学计算机及信息工程学院, 江苏 南京 210098; 2. 江苏油田南京计算中心, 江苏 南京 210018)

摘要 阐述了在图像压缩中的迭代函数系统的理论, 并利用自动机理论对其吸引子相关的迭代函数系统的不确定性进行了探讨, 从数学的角度给予了论证.

关键词 分形学 迭代函数系统 吸引子 吸引子集

中图分类号 TP391.41

文献标识码 A

文章编号 1000-1980(2003)03-0335-03

美国 Mandelbrot 于 1975 年首创了分形理论. 在其代表作《分形: 形态偶然性和维数》、《自然界的分形几何》中都对分形理论作了具体、详实的阐述. 而今分形理论已经在许多学科中迅速得到了发展. 经典的编码方法以纯数据的方式对待图像, 利用信号理论和采用信号序列或矩阵的形式, 从微观角度去编码. 由于没有考虑图像自身固有的特点及人眼对图像的视觉特性, 其压缩比不是很高. 利用分形图像技术可以在计算机上实现模拟自然景物、动画制作、建筑物配景等, 在影视制作中能生成奇峰异谷、独特场景、产生新奇美丽的景色. 而且分形图像压缩方法利用图像中的局部相似特性进行图像编码, 从而消除更多的冗余, 得到更高的压缩比. 将分形应用于计算机图像压缩, 产生了一种很有发展前途的分形图像编码方法. 在海湾战争中, 美军使用了分形技术, 用于军事地图的缩放、攻击目标的匹配追踪等.

分形图像压缩的理论基础是迭代函数系统 IFS(Iterated Function System)定理、收缩映射定理和拼贴定理. 迭代函数系统, 它是分形绘图的典型方法. 该方法只需对少量参数进行反复迭代运算, 就可以产生大量美丽新颖的图片.

对于分形理论以及迭代函数系统的研究虽然没有停止过, 但目前只有部分图像可以用迭代函数系统的方法进行有效压缩. 该项技术的应用还在接受检验. 本文对迭代函数系统及其不可确定性进行探讨, 从而使人们对于迭代函数系统的实质有更深层次的理解.

1 迭代函数系统

一个迭代函数系统由给定的 n 个收缩仿射变换 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ 在一个以 d 为度量的度量空间 $\{X, d\}$ 上形成. 表示为 $\{X; \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$, 其中 X 是一个 k 维欧几里德空间.

不妨限制 X 于 $[0, 1]^k$ 空间, 则一个 2 维迭代函数系统 IFS 可以定义如下:

令 $\omega: R^2 \rightarrow R^2$, 则

$$\omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$a_{i,j} (i, j = 1, 2)$ 及 $b_i (i = 1, 2)$ 均为有理数.

由 IFS 的收缩性易知

$$\left| \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \right| < 1$$

类似的, 一个 1 维迭代函数系统可以定义为

令 $\omega: R \rightarrow R$ $\omega(X) = ax + b$

对于由压缩仿射变换构成的 IFS, 根据收缩映射定理, 它存在惟一的吸引子集. 仿射映射是由一组方程组

成,每一个方程都有不动点.通常把不动点称为吸引子,把一组仿射映射中所有不动点的集合,称为该仿射映射的吸引子集.

给出一个IFS的例子:

IFS $\{[0,1]^2, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \omega_1(x,y) = \{0.5x, 0.5y\}$
 $\omega_2(x,y) = \{0.5x + 0.5, 0.5y\}, \omega_3(x,y) = \{0.5x, 0.5y + 0.5\}$

该IFS的吸引子集构成的图形(见图1)为Sierpinski三角形.

2 引理

介绍在以下数学论证中使用到的符号所表示的特殊意义.

Σ ——一个有限元素构成的字母表;上标 $*$ ——有限次的重复;上标 ω ——无限次的重复; Σ^ω ——所有由 Σ 中的元素构成的无限字母串的集合;
 Σ^* ——所有由 Σ 中的元素构成的有限字母串的集合; $\Sigma^\infty = \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$.

令 $\Sigma = \{1, 2, 3, \dots, d-1\} \quad I: \Sigma^\infty \rightarrow [0,1]$
 $I(\omega) = 0. \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots \omega_{|\omega|} \quad \omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots \omega_{|\omega|}$

则 I 是一个非满映射且当 I 限制为 Σ^ω 时 I 是一个入射.这是因为任取 $a, b \in \Sigma^\omega$,若有 $a \neq b$,则必有 $I(a) \neq I(b)$.所以当 I 限制为 Σ^ω 时 I 是一个入射.对于每一个数串 $\omega \in \Sigma$ 定义一个1维仿射变换

$f^\omega: [0,1] \rightarrow [0,1] \quad f^\omega(x) = 1/d^{|\omega|} \times x + I(\omega)$

其中 $|\omega|$ 表示数串 ω 的长度,则有以下结论成立:

结论1 $\omega \in \Sigma$ 且令 $x \in \Sigma^\infty$ 则 $I(\omega x) = f^\omega(I(x))$

证明 令 $a = I(x)$,且 a 的表示为 $0. a_1 a_2 a_3 \dots$

则由于 $\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots \omega_{|\omega|}, I(\omega) = 0. \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots \omega_{|\omega|}, d^{-|\omega|} \times a = 0.000 \dots 000 a_1 a_2 a_3 \dots$ 其中 a_1 前面共有 $|\omega|$ 个0, $d^{-|\omega|} \times a + I(\omega) = f^\omega(a) = 0. \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots \omega_{|\omega|} a_1 a_2 a_3 \dots = I(\omega x)$.

结论2 令 $u_1 u_2 u_3 \dots u_i \in \Sigma^*, (i \geq 0)$

则 $I(u_1 u_2 u_3 \dots u_i) = f^{u_1}(f^{u_2}(\dots(f^{u_i}(0))\dots))$
证明 $I(u_1 u_2 u_3 \dots u_i) = f^{u_1}(u_2 u_3 \dots u_i) = f^{u_1}(f^{u_2}(u_3 u_4 \dots u_i)) = \dots = f^{u_1}(f^{u_2}(\dots(f^{u_i}(0))\dots))$

结论3 有 $I(u_1 u_2 u_3 \dots) = \lim f^{u_1}(f^{u_2}(\dots(f^{u_i}(x))\dots))$, (其中 $u_1 u_2 u_3 \dots \in \Sigma^\infty$)

证明 因为 $I(u_1 u_2 u_3 \dots u_i) = f^{u_1}(f^{u_2}(\dots(f^{u_i}(0))\dots))$ (根据结论2)

所以 $\lim f^{u_1}(f^{u_2}(\dots(f^{u_i}(x))\dots)) = I(u_1 u_2 u_3 \dots)$

结论4 令 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n \in \Sigma^*, R = \{u_1 + u_2 + u_3 + \dots u_n\}^\omega$ 包含于 $\Sigma^\omega (N \geq 1)$

令 A 为IFS $\{[0,1]^2; f^{u_1}, f^{u_2}, f^{u_3}, \dots, f^{u_n}\}$ 则 $I: R \rightarrow A$ 是一个双射.

证明 因为 A 为IFS的吸引子,

所以 $A = \bigcup \lim f^{u_1}(f^{u_2}(\dots(f^{u_i}(x))\dots))$

其中 $\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots$ 且 $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots \in \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}, x$ 是一切实数.

由引理可知 $A = \bigcup I(\omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots) = \bigcup I(\omega)$,因此 $A = I(R)$.从而 $I: R \rightarrow A$ 是一个满射.又由引理知,当 I 限制在 Σ^∞ 上时, I 是一个内射,综上所述 $I: R \rightarrow A$ 是一个双射.

还可以将上述引理推广到2维的情况,在2维空间中可以令

$I: \Sigma^\infty \times \Sigma^\infty \rightarrow [0,1]^2, I(u,v) = (I(u), I(v)), (u,v \in \Sigma^\infty)$

3 IFS的不可确定性

上文所构造的数学模型可以看成是一个图灵机.这种数字串反复迭代的过程可以看成是一个图灵机运作过程.分形图像其实等价于该图灵机所不能识别的语言,不妨称为该图灵机的混沌语言.

定理1 给定一个IFS,不能判定它的吸引子集是否与从点 $B(0,0)$ 到点 $C(1,1)$ 的线段相交.

证明 首先说明,设 $A, B \in \Sigma^*$,令 $A = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_k, B = X_1, X_2, \dots, X_k$ 若存在一个序列 $i_1, i_2, \dots$,

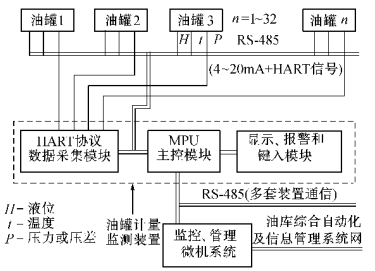


图1 Sierpinski 三角形
Fig.1 Sierpinski triangle

$i_m (m \geq 1)$ 使得 $\omega_{i_1} \omega_{i_2} \omega_{i_3} \cdots \omega_{i_m} = X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_m}$, 则序列 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 称为一个序列解.

令 $\text{IFS} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2 ; g_1, g_2, g_3, \cdots, g_n$, $g_i = [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ 为一个 2 维仿射变换.

$$g_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} d^{-|x_i|} & 0 \\ 0 & d^{-|x_i|} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} I(x_i) \\ I(y_i) \end{bmatrix}$$

设 A 为该 IFS 的吸引子集, 则 A 是否与线段 BC 相交等价于下面的序列 X, Y 是否存在一个无限的序列解. 因为 $R = \{(x_1, y_1) + (x_2, y_2) + \cdots + (x_n, y_n)\}^\omega$ 表示该 IFS 的吸引子集, 当序列 X, Y 存在一个无限的序列解时, 即当 $X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_m} \cdots = Y_{i_1} Y_{i_2} Y_{i_3} \cdots Y_{i_m} \cdots$, 则存在着 X, Y 的一对对应子列 $X_n, Y_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 对于任意给定的 ϵ , 存在 N , 当 $n > N$ 时, $|X_n - Y_n| < \epsilon$, 这就证明了 $\lim X_n = \lim Y_n$, 于是 A 与线段 BC 相交.

而序列 X 与 Y 是否存在一个无限的序列解等价于以下结论成立 : (a) 即存在 $\Sigma_0 \in \Sigma^\omega$, 使得 $(\Sigma_0, \Sigma_0) \in R$; (b) A 与线段 BC 相交, 等价于存在 $a \in [0, 1]$, $(a, a) \in A$. 再根据前述结论 1, 可知 $I : R \rightarrow A$ 是一个双射. 因而, 存在 Σ_0 , 使得 $(\Sigma_0, \Sigma_0) \in R$ 等价于存在 a , 使得 $(a, a) \in A$ 从而 (a) 与 (b) 等价.

所以, 判断吸引子集 A 是否与线段 BC 相交, 只要序列 X 与 Y 是否存在一个无限的序列解, 而这个问题是不可判定的. 可以用图灵机的观点分析, 序列 X 与 Y 是否存在一个无限的序列解, 等价于是否可以判定图灵机停机, 而根据自动机理论, 图灵机的停机问题是不可判定的.

定理 2 给定一个 IFS, 无法判定其是否为完全分离的 (即其吸引子集两两不相交).

令 $\text{IFS} [0, 1]^2 ; \omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_n$, 令 A 为该 IFS 的吸引子集.

定义一个 IFS 称为是完全分离的, 当且仅当 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}, i \neq j, \omega_i(A) \cap \omega_j(A) = \emptyset$. 推广定理 1, 可以发现它暗示了如下结论 : 即无法判定两个给定的 IFS 的吸引子集的交集是否非空. 现在可以由上述推论得到关于 IFS 的另一个不确定性. 于是有定理 2 给定一个 IFS, 无法判定其是否为完全分离的 (即其吸引子集两两不相交).

4 结 论

分形图像技术中的迭代函数系统是非常有效的压缩方法, 本文试图用图灵机的相关理论对其进行了探讨, 受可计算性理论 post 问题启发, 引入了符号串的方法来讨论迭代函数 IFS 及是否可以判定 IFS 为完全分离的.

参考文献 :

- [1] 林贻侠, 朱铨范, 仲明瑜, 等. 吸引子在迭代函数系统中的作用 [J]. 上海大学学报, 1999, 5(1) : 78—83.
- [2] 杨木, 朱森良. 对基于迭代函数系统的分形图像压缩方法的探讨 [J]. 贵州工业大学学报, 1999, 28(1) : 18—22.

Iterated function system (IFS) and its indetermination

ZHANG Zheng-lan¹, ZHANG Xiao-feng¹, LI Guo-jian²

- (1. College of Computer and Information Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China ;
- 2. Nanjing Computation Center of Jiangsu Oil Field, Nanjing 210018, China)

Abstract : The theory of iterated function system in image compression is expounded. The indetermination of the system relevant to its attractors is discussed and verified from the mathematical angle by use of the auto-machine theory.

Key words : fractal geometry ; iterated function system ; attractor ; attractor set