

结构最优设计问题的一种新方法

杨晓华¹, 陆桂华¹, 杨志峰²

(1. 河海大学水资源环境学院, 江苏 南京 210098; 2. 北京师范大学环境科学研究所, 北京 100875)

摘要 给出了结构优化设计参数识别的一种新方法——格雷码加速遗传算法. 研制了格雷码加速遗传算法实施的详细步骤, 并对格雷码加速遗传算法的有效性和可行性进行了理论分析和实例分析. 结果表明, 格雷码加速遗传算法具有直观、简便、快速、适用性强等特点, 是一种既可以较大概率搜索全局最优解, 又能进行局部细致搜索的非线性优化方法, 可广泛应用于各种结构优化设计中.

关键词 格雷码 遗传算法 优秀个体 结构 优化设计

中图分类号 :TU318 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2003)03-0351-04

结构优化设计的理论和方法分为两类:一是准则法,根据满应力准则和能量准则等,求得结构最优解;二是数学规划法,利用线性规划、非线性规划、动态规划等,求得系列设计参数的最优解^[1]. 而传统的数学规划方法对目标函数要求较高,通常需要目标函数连续、可导.

近年来,遗传算法(genetic algorithm,简称 GA)在各种规划问题中越来越引起重视. GA 作为一种借鉴生物界自然选择思想和自然遗传机制的全局随机搜索算法,模拟自然界中生物从低级向高级的进化过程,其主要优点是优化求解过程与梯度信息无关,对于复杂的优化问题只需选择、杂交、变异 3 种遗传运算就能得到优化解,基于这些显著的优点,GA 已引起人们的广泛应用和研究^[2~5]. 在应用 GA 时,笔者发现二进制编码有时不便于反映所求问题的结构特征,对于一些连续函数的优化问题,GA 的局部搜索能力也较差. 相邻整数的二进制编码可能具有较大的 Hamming 距离,例如 15 和 16 的二进制表示为 01111 和 10000,因此,算法要从 15 改进到 16 则必须改变所有的位,这种缺陷将降低遗传算子的搜索效率. 二进制编码的这一缺点有时称为 Hamming 悬崖. 为此,人们提出用格雷码(Gray code)来对个体进行编码^[6].

格雷码是这样的一种编码,其连续的两个整数所对应的编码值之间仅仅只有一个码位是不相同的,其余码位都完全相同. 二进制编码和格雷码之间的对应关系是:设一个二进制编码为 $B = b_m b_{m-1} \cdots b_2 b_1$, 其对应的格雷码为 $G = g_m g_{m-1} \cdots g_2 g_1$. 由二进制编码到格雷码的转换公式为

$$g_m = b_m \quad (1)$$

$$g_i = b_{i+1} \oplus b_i \quad i = m-1, m-2, \cdots, 1 \quad (2)$$

由格雷码到二进制编码的转换公式为

$$b_m = g_m \quad (3)$$

$$b_i = b_{i+1} \oplus g_i \quad i = m-1, m-2, \cdots, 1 \quad (4)$$

以上两种转换公式中, $\oplus$ 表示异或运算符.

格雷码编码方法的主要优点是:(a) 便于提高遗传算法的局部搜索能力;(b) 杂交、变异等遗传操作便于实现;(c) 符合最小字符集原则;(d) 便于用模式定理对算法进行理论分析^[6].

为了求解一般的结构优化设计问题以及提高算法的计算精度和速度,本文采用的格雷码遗传算法是在格雷码遗传算法中引进加速搜索算子,逐步调整参数变化区间,由此形成了本文的格雷码加速遗传算法

收稿日期 2002-03-12

基金项目 水利部科技创新基金资助项目(scx2000-53) 国家重点基础研究发展规划资助项目(G1999043605)

作者简介 杨晓华(1966—),女,福建漳平人,副教授,博士后,主要从事水文水资源及环境问题的数值分析、非线性规划和系统工程优化研究.

(Gray Coding Based Accelerating Genetic Algorithm,简称 GAGA),并在刚接框架优化设计中得到了成功的应用.下面给出 GAGA 的计算技术.

1 GAGA 的计算技术

不失一般性,设模型的参数优化问题为

$$\left. \begin{aligned} \min f(c_1, c_2, \cdots, c_p) \\ \text{s.t. } a_j \leq c_j \leq b_j \quad j = 1, 2, \cdots, p \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 $c = \{c_j\}$, c_j 为 p 个待优化变量.

格雷码加速遗传算法包括 8 步.步 1:变量取值范围的格雷码编码^[3].步 2:随机生成 n 个初始父代个体^[3].步 3:解码和父代个体的适应能力评价^[3].构造与第 i 个父代个体成反比的适应度函数 $F(i)$. $F(i)$ 越大,目标函数 $f(i)$ 越小,表示该个体的适应能力越强.步 4:父代个体按与适应度函数成正比例的概率被选择.适应度函数 $F(i)$ 越大,目标函数值越小的个体被选中的机会越大,反映了生物界优胜劣汰的规律.这样共选择两组个体,即 $2n$ 个个体.步 5:父代个体的杂交.由上步得到的两组个体两两配对成为双亲,依概率 P_c 将双亲的格雷码数组的任意一段值互换,得到两组子代个体.步 6:子代个体的变异.任取上步中的一组子代个体,将它们的格雷码数组的任意两位值依概率 P_m (即变异率)进行翻转(原值为 0 的变为 1,反之变为 0).步 7:进化迭代.由上步得到的子代个体作为新的父代个体.算法转入步 3,进入下一次进化过程,重新评价、选择、杂交、变异,如此循环往复,优秀个体将逼近最优点.步 8:加速循环.大量应用研究表明,格雷码遗传算法(GGA)计算量大,全局优化速度慢,GGA 解的精度受编码长度控制.经深入分析格雷码遗传算法的选择、杂交、变异 3 种算子的寻优特性以及大量的数值试验和实际应用,把第一、第二次进化迭代所产生的 s 个优秀个体的变化范围作为变量新的取值范围,算法转入步 1,如此循环往复,优秀个体的变化范围将逐步收缩,与最优点的距离越来越近,直至达到预定加速次数或最优个体的目标函数值小于某一设定值,结束整个算法的运行.

以上 8 步构成格雷码加速遗传算法.它自身的参数有长度 e ,父代个体数目 n ,优秀个体数目 s ,杂交概率 P_c 和变异率 P_m .

2 算法理论分析

2.1 GAGA 的精确全局优化性能分析

GAGA 实际上是利用格雷码遗传算法所产生的优秀个体群来自动调整、压缩搜索范围的.GAGA 的全局优化不仅是精确的,也是稳健的.在 p 个优化变量问题和 GAGA 加速循环 q 次的情况下,优秀个体包围最优点的概率 P_{op} 为 $(1 - 0.5^{2s})^{pq}$.例如 s, p, q 分别取 10, 10, 10;10, 15, 10;10, 20, 10. P_{op} 分别为 0.999 905; 0.999 857 和 0.999 809.可见 GAGA 是依较大概率包围最优点的.

2.2 GAGA 的收敛性分析

GAGA 的设计基于如下定理.

定理 设式(5)变量的初始变化范围为闭 p 维长方体, $B_0 = \{c_1, c_2, \cdots, c_p) \mid a_j^0 \leq c_j \leq b_j^0, j = 1, 2, \cdots, p\}$, GAGA 第 t 次加速循环时变量的搜索范围 $B_t = \{c_1, c_2, \cdots, c_p) \mid a_j^t \leq c_j \leq b_j^t, j = 1, 2, \cdots, p\}$,若 B_t 满足下面 3 个条件:

- (a) $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_t \supset B_{t+1} \supset \cdots$;
- (b) $\lim_{t \rightarrow \infty} R_t = 0$, R_t 为 B_t 的半径;
- (c) B_t 里包含 $f(x)$ 在闭 p 维长方体 B_0 上的最优解.

则存在惟一的 $x^* \in B_t, t = 1, 2, \cdots$,且 x^* 是 $f(x)$ 在闭 p 维长方体 B_0 上的最优解.

证明 由条件(a)(b),利用完备距离空间的闭长方体套定理,知 GAGA 是收敛的.由条件(c)知 GAGA 收敛于问题的最优解.

在实际运行过程中,GAGA 是以较大概率收敛于问题的最优解的,详见文献[3].

2.3 GAGA 测试

一种数值优化方法是有效的,其必要条件是对下面 3 个函数的优化是有效的.它们分别是 Rosenbrock 函

数 f 、Powell 函数 g 和指数函数 h . 本文执行 GAGA 的参数设置如下:最大加速次数为 14,最大演化代数 $T = 2$,最大种群规模 $N = 300$,杂交概率 $P_c = 0.5$,变异率 $P_m = 1.0$,优秀个体数目 $s = 10$.

$$\min f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad x_1, x_2 \in [-2, 2]$$
$$\min g(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4 \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in [-2, 2]$$
$$\min h(x_1, x_2) = \sum_a [(e^{-ax_1} - e^{-ax_2}) - (e^{-a} - e^{-10a})]^2 \quad a = 0.1, 0.2, \dots, 1.0 \quad x_1 \in [-2, 2], x_2 \in [5, 15]$$

用 GAGA 解这 3 个函数的优化结果见表 1. 从表 1 可以看出, GAGA 无论是计算精度和计算速度都是令人满意的.

表 1 各种问题的计算结果比较
Table 1 Comparison of the calculated results of several problems

问题	计算函数最小值	加速次数	CPU 时间/s	计算解	精确解
f	1.16×10^{-6}	14	2.5	(1.0000, 1.0001)	(1, 1)
g	6.0×10^{-7}	10	2.0	(0.0021, -0.0002, -0.0021, -0.0024)	(0, 0, 0, 0)
h	1.0×10^{-8}	4	1.0	(1.0001, 9.9989)	(1, 10)

3 应 用

取文献[1]的坡顶框架优化设计的实例. 如图 1 所示对称坡顶框架, 在顶点 C 作用有 2 kN 的垂直荷载, 弹性模量为 2.07×10^7 Pa. 要求柱采用同样的截面, 惯性矩为 I_1 , 斜梁可用另一种截面, 惯性矩为 I_2 . C 点的垂直位移限制为 4.8 mm, B 点和 D 点的水平位移限制为 2.78 mm, 杆中的应力不得超过 0.15×10^9 Pa. $AB = BC = 1\,000$ mm, BC 与水平直线的夹角为 30° . 为方便起见, 本例不计轴力和剪力引起的变形, 只计算弯矩项. 各种忽略或假设的条件、目标函数和约束条件的详细推导过程见文献[1]. 用截面惯性矩 I_1, I_2 作为设计变量, 得非线性规划问题:

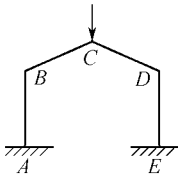


图 1 坡顶框架
Fig.1 Frame of slope top

$$\min Z = \sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}$$

(6)

顶点 C 的应力约束

$$2\,886\sqrt[4]{I_2}(5I_1 + 2I_2)/(I_1^2 + 32I_1I_2 + 4I_2^2) \leq 0.15$$

(7)

B 点的应力约束

$$17\,316\sqrt[4]{I_1}\sqrt{I_2}/(I_1^2 + 32I_1I_2 + 4I_2^2) \leq 0.15$$

(8)

A 点的应力约束

$$2\,886\sqrt[4]{I_1}(I_1 + 4I_2)/(I_1^2 + 32I_1I_2 + 4I_2^2) \leq 0.15$$

(9)

坡顶临界变位约束

$$4\,832\,000(I_1 + I_2)/(I_1^2 + 32I_1I_2 + 4I_2^2) \leq 4.8$$

(10)

其中 $I_1, I_2 > 0$. 考虑到最优化条件, 式(7)~(10)为起作用的约束, 关于式(6)~(7)~(10), 利用 GAGA 求解. 为方便, 取 $I_1 = 10\,000x, I_2 = 10\,000y$, 则上述问题变为

$$\min f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

(11)

$$\text{s. t.} \quad 2.886\sqrt[4]{y}(5x + 2y)/(x^2 + 32xy + 4y^2) \leq 0.15$$

(12)

$$483.2(x + y)/(x^2 + 32xy + 4y^2) \leq 4.8$$

(13)

其中 $x, y \geq 0, Z(I_1, I_2) = 100f(x, y)$.

GAGA 参数设置 加速次数为 2, 演化代数 $T = 2$, 种群规模 $N = 300$, 杂交概率 $P_c = 0.5$, 变异率 $P_m = 1.0$, 优秀个体数目 $s = 10$. GAGA 计算结果见表 2. 从表 2 可以看出: (a) GAGA 计算速度很快, 仅需加速 8 次, 历时仅 2 s; (b) GAGA 计算精度也很高, $\min f$ 的值为 4.633 777, 优于目前精度较好的区间数学方法^[1]迭代 108 次的计算结果 ($\min f$ 的值为 4.634 595). (c) GAGA 的解 $x = 4.392\,347, y = 6.441\,366$ 代入式(12)~(13)全部满足约束条件. 原非线性规划问题(6)~(10)的最优解为: $I_1 = 43\,923.47\text{ mm}^4, I_2 = 64\,413.66\text{ mm}^4$.

表 2 用 GAGA 估计坡顶框架问题的参数

Table 2 Parameters estimated by GAGA for slope top frame problems

加速次数	优秀个体各参数的变化范围		目标函数 f 最小值
	x	y	
1	[0.5, 10]	[0.5, 10]	4.665 927
4	[3.781 997 0, 5.068 007 0]	[5.834 968 0, 7.419 993 0]	4.635 174
8	[4.154 341 0, 4.742 458 0]	[6.074 252 0, 6.789 601 0]	4.633 777
GAGA 估计	4.392 347	6.441 366	4.633 777

4 结 语

在结构优化设计参数识别方面存在大量非线性规划问题,传统优化算法在处理非线性规划问题时一般需要目标函数连续、可导,区间数学方法需要目标函数满足 Lipschitz 条件.遗传算法是新近推出的解此类问题的通用数值方法,它新颖直观、简便实用,适应性强.遗传算法主要优点是优化求解过程与梯度信息无关,不受约束条件限制,只需目标函数便可计算,对于复杂的参数优化问题只需选择、杂交、变异 3 种遗传运算就能得到优化解.由于二进制遗传算法存在 Hamming 悬崖问题,其计算精度受到一定影响,因而本文采用格雷码编码.另外,为了提高格雷码编码遗传算法的计算速度,本文在格雷码遗传算法中引进加速搜索算子,逐步调整参数变化区间,由此形成本文的格雷码加速遗传算法.文中给出了格雷码加速遗传算法的详细步骤和算法参数的简便设置技术,并在坡顶框架优化设计的参数识别中得到了满意的全局最优解.格雷码加速遗传算法不但可以得到全局最优解,而且对工程设计中约束条件较多、精度要求较高的问题尤为适用.格雷码加速遗传算法可广泛应用于各种结构优化参数识别问题中.

参考文献:

[1] 王海鹰.解结构最优设计问题的区间方法[J].河海大学学报,1991,19(3):37—43.
[2] 金菊良,丁晶.遗传算法及其在水科学中的应用[M].四川:四川大学出版社,2000.123—124.
[3] 杨晓华.参数优选算法研究及其在水文模型中的应用[D].南京:河海大学,2002.
[4] 吴浩扬,朱长纯,常炳国,等.基于种群过早收敛程度定量分析的改进自适应遗传算法[J].西安交通大学学报,1999,33(11):27—30.
[5] QI Xiao-feng. Theory analysis of evolution algorithms with an infinite population size in continuous space[J]. IEEE Trans Neural Network, 1994,5(1):120—129.
[6] 周明,孙树栋.遗传算法原理及应用[M].北京:国防工业出版社,2001.34—35.

A new method for optimum design of structures

YANG Xiao-hua¹, LU Gui-hua¹, YANG Zhi-feng²

(1. College of Water Resources and Environment, Hohai Univ., Nanjing 210098, China ;
2. Research Institute of Environmental Science, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract A Gray coding-based accelerating genetic algorithm (GAGA) is presented for parameter identification in the optimal design of structures, and detailed steps are developed for GAGA. The validity and feasibility of the algorithm is studied by theoretic analysis and case study. The result shows that GAGA, with the characteristics of directness, convenience, high speed, and high applicability, is a superior nonlinear optimal method that can perform locally meticulous search for the global solution with high probability, so the algorithm can be widely applied to the optimal design of various structures.

Key words Gray code ; genetic algorithm ; superior individual ; structure ; optimal design