

具有非线性阻尼项和源项的波动方程解的爆破

袁 庆 陈才生

(河海大学理学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 通过能量函数 ,利用两种不同的方法 ,研究了含有源项和阻尼项的一类非线性波动方程的初边值问题 ,以及在某种条件下整体解的不存在性 .证明了当问题的初始能量 $E(0)<d$ (d 为某正数)时 ,问题的解必在有限时间内爆破 .

关键词 非线性波动方程 ;能量函数 ;整体解存在性 ;爆破

中图分类号 :O29 文献标识码 :A 文章编号 :1000-198X(2003)03- 0358-05

最近 ,Biazutti^[1]研究了一类非线性波动方程的初边值问题 :

$$\begin{aligned} u_{tt} - \sum_{i=1}^n (\sigma_i(u_{x_i}))_{x_i} - \Delta u_t + F(u_t) &= f(x,t) \quad \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \partial\Omega \times (0,T) \end{aligned}$$

在 $\sum_{i=1}^n (\sigma_i(u_{x_i}))_{x_i}$ 和 $F(u_t)$ 不具有单调性的情况下整体解的存在性和解的渐近性态 .这里 Ω 是 R^n 中的有界区域 ,边界 $\partial\Omega$ 光滑 .Dang Dinh Ang 和 Pham Ngoc Dinh^[2]在 $f(x,t)=0$ 且 $F(u_t)=|u_t|^\rho \text{sgn}(u_t)$ $0<\rho\leq 1$ 具有单调性的假设下 ,研究了解的存在性和惟一性 .Yamada^[3]和 Zuazua^[4]对弱解做了一些类似的研究 .现用一非线性源项 $|u|^{p-1}$ 置换 $f(x,t)$,得到一应用更广泛的方程 ,可参看文献 [5][6] .

现研究 k -laplacian 型波动方程的初边值问题 :

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} - \text{div}(|\nabla u|^{k-2} \nabla u) - \Delta u_t + |u_t|^{m-1} u_t &= |u|^{p-1} u \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \Omega \\ u(x,t) &= 0 \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

$k \geq 2 \qquad m \geq 1 \qquad p \geq 1$

1 预 备 知 识

首先 ,研究问题 (1)解的情况 .

定理 若 $p \leq \max(k-1,m)$, $u_0 \in W_0^{1,k}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$,那么问题 (1)存在整体解 . $u(0,T) \rightarrow R$,对 $\forall T>0$, u 满足 $u \in L^\infty(0,T;W_0^{1,k}(\Omega))$, $u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$.

证明 一旦局部解存在原理得证 ,同文献 [7] 类似能证得连续性原理 .

令 $\Phi(t) = 1/2 \|u_t\|_2^2 + 1/k \|\nabla u\|_k^k + 1/(p+1) \|u\|_{p+1}^{p+1}$

现用 u_t 乘以问题 (1)中的第一个式子 ,并在 Ω 上积分 ,则

$$\Phi'(t) = - \|u_t\|_{m+1}^{m+1} - \|\nabla u_t\|_2^2 + 2 \int_\Omega uu_t |u|^{p-1} dx$$

运用 Holder 和 Young 不等式 ,得

$$\left| \int_\Omega uu_t |u|^{p-1} dx \right| \leq \|u\|_{p+1}^p \|u_t\|_{p+1} \leq C_\epsilon \|u\|_{p+1}^{p+1} + \epsilon \|u_t\|_{p+1}^{p+1}$$

对 $\forall u \geq 0$ 和 $y > 0$ 利用函数 (u^y/y) 的凸度,得

$$\frac{\|u_t\|_{p+1}^{p+1}}{p+1} \leq C_1 \frac{\|u_t\|_2^2}{2} + C_2 \frac{\|u_t\|_{m+1}^{m+1}}{m+1}$$

此时 $2 \leq p+1 \leq m+1, C_1 > 0, C_2 > 0$. 进而得

$$\Phi'(t) \leq -\|u_t\|_{m+1}^{m+1} - \|\nabla u_t\|_2^2 + 2C_2\epsilon(p+1) \frac{\|u_t\|_{m+1}^{m+1}}{m+1} + 2C_1\epsilon(p+1) \frac{\|u_t\|_2^2}{2} + 2C_\epsilon \|u\|_{p+1}^{p+1}$$

这里可取 ϵ 足够小,得 $\Phi'(t) \leq C\Phi(t)$.

然后运用 Gronwall 引理和连续性原理,得到整体解的存在性. 证毕.

利用能量方法来讨论问题 (1) 整体解的爆破,可参见文献 [8]. 若 $u(t)$ 是问题 (1) 的解,其能量定义为

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{k} \|\nabla u\|_k^k - \frac{1}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} \tag{2}$$

现用 u_t 乘以问题 (1) 中的第一个式子,并在 Ω 上积分,得恒等式

$$E'(t) = -\|u_t\|_{m+1}^{m+1} - \|\nabla u_t\|_2^2 \tag{3}$$

显而易见 $E(t)$ 是 t 的单调减少函数. 若令 $H(t) = -E(t)$, 那么 $H(t)$ 是 t 的单调增加函数,且

$$H(0) \leq H(t) \leq \frac{1}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} \tag{4}$$

2 主要结果

定理 1 设 $p > \max(k-1, m), u_0 \in W_0^{1,k}(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega)$, 且 $H(0) > 0$, 那么问题 (1) 的解 $u(t)$ 在 L^{p+1} 范数下必在有限时间内爆破.

该定理表明,当 $p > \max(k-1, m)$ 和初始能量 $E(0) < 0$ 时,问题 (1) 的整体解不存在;换句话说,若问题 (1) 存在整体解,必有 $E(0) \geq 0$.

定理 2 设当 $1 \leq n \leq 4$ 时, $p > \max(k-1, m)$; 当 $n > 4$ 时, $\max(k-1, m) < p < (n+4)(n-4)$. 那么存在 $d > 0$, 只要

$$u_0 \in W_0^{1,k}(\Omega) \quad u_1 \in L^2(\Omega) \quad E(0) < \frac{(p+1)d}{p+1-k} \tag{5}$$

则问题 (1) 的解 $u(t)$ 在 L^{p+1} 范数下必在有限时间内爆破.

3 定理 1 的证明

在证明中,假设定理 1 的条件均满足. 采用反证法,假设问题 (1) 存在整体解 $u(t)$. 记

$$g(t) = \|u(t)\|_2^2 \quad t \geq 0 \tag{6}$$

$$H(t) = -E(t) \quad t \geq 0 \tag{7}$$

引进辅助函数

$$\alpha(t) = H^{1-\lambda}(t) + \epsilon g'(t) \quad t \geq 0 \tag{8}$$

其中 ϵ, λ 是待定的适当小正数. 由式 (3) 得

$$H'(t) = \|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|\nabla u_t\|_2^2 \quad t \geq 0 \tag{9}$$

先证明函数 $\alpha(t)$ 必在有限时间内爆破. 对式 (8) 求导得

$$G'(t) = (1-\lambda)H^{-\lambda}(t)H'(t) + \epsilon g''(t) \quad t \geq 0 \tag{10}$$

由于

$$\begin{aligned} g''(t) &= 2 \int_{\Omega} u_t^2 dx + 2 \int_{\Omega} uu_{tt} dx = \\ &4 \|u_t\|_2^2 + 4H(t) - \frac{2(k-2)}{k} \|\nabla u\|_k^k + \frac{2(p-1)}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} - \\ &2 \int_{\Omega} (uu_t|u_t|^{m-1} + \nabla u \nabla u_t) dx \end{aligned} \tag{11}$$

所以

$$G'(t) = (1-\lambda)H^{-\lambda}H' + 4\epsilon \|u_t\|_2^2 + 4\epsilon H - \frac{2\epsilon(k-2)}{k} \|\nabla u\|_k^k +$$

$$\frac{2\varepsilon(p-1)}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} - 2\varepsilon \int_{\Omega} (uu_t |u_t|^{m-1} + \nabla u \nabla u_t) dx \quad (12)$$

先对式(12)中的最后一项作如下估计. 注意到 $p > m$ 和式(4), 由 Holder 不等式得

$$2\varepsilon \left| \int_{\Omega} uu_t |u_t|^{m-1} dx \right| \leq C\varepsilon \|u\|_{m+1} \|u_t\|_{m+1}^m \leq C\varepsilon \|u\|_{p+1} \|u_t\|_{m+1}^m \leq C\varepsilon H^{1(\lambda(p+1)-1)(m+1)} \|u\|_{p+1}^{(p+1)(m+1)} \|u_t\|_{m+1}^m$$

注意到式(9), 进一步由 Young 不等式得

$$\|u\|_{p+1}^{(p+1)(m+1)} \|u_t\|_{m+1}^m \leq \alpha \eta \|u\|_{p+1}^{p+1} + \eta^{-1} \|u_t\|_{m+1}^{m+1} \leq \alpha \eta \|u\|_{p+1}^{p+1} + \eta^{-1} H'$$

这里 η 为任意正数. 取 $0 < \lambda < 1/2$ 且 $\lambda \leq 1(\lambda(m+1)-1)(p+1)$, 得

$$H^{1(\lambda(p+1)-1)(m+1)}(t) \leq H^{-\lambda}(t) \quad t \geq 0$$

$$\text{于是} \quad 2\varepsilon \left| \int_{\Omega} uu_t |u_t|^{m-1} dx \right| \leq C\varepsilon H^{-\lambda} (\eta \|u\|_{p+1}^{p+1} + \eta^{-1} H') \quad (13)$$

类似方法, 又由式(2), $H(0) = -E(0) > 0$ 及 $E(t)$ 单调减少, 得

$$2\varepsilon \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right| \leq C\varepsilon H^{-\lambda} (\eta \|u\|_{p+1}^{p+1} + \eta^{-1} H') \quad (14)$$

此时 η 为任意正数. 取 $\lambda \leq 1/k - 1(\lambda(p+1))$, 得 $H^{1(\lambda(p+1)-1)/k}(t) \leq H^{-\lambda}(t), t \geq 0$. 结合式(13)及(14), 取 $0 < \lambda < 1/2$ 且 $\lambda \leq \min(1(\lambda(m+1)-1)(p+1), 1/k - 1(\lambda(p+1)))$, 得

$$G'(t) \geq (1 - \lambda - C\varepsilon/\eta) H^{-\lambda} H' + 4\varepsilon \|u_t\|_2^2 + 4\varepsilon H - \frac{2\varepsilon(k-2)}{k} \|\nabla u\|_k^k + \varepsilon (\lambda(p-1)(p+1) - C\eta H^{-\lambda}(0)) \|u\|_{p+1}^{p+1}$$

由式(2)及(4)得

$$\frac{1}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} > H(0) + \frac{1}{k} \|\nabla u\|_k^k$$

$$\text{因此有} \quad G'(t) \geq (1 - \lambda - C\varepsilon\eta^{-1}) H^{-\lambda} H' + 4\varepsilon \|u_t\|_2^2 + 4\varepsilon H + \varepsilon (\lambda(p-1)(p+1) - \lambda(k-2)(p+1) - C\eta H^{-\lambda}(0)) \|u\|_{p+1}^{p+1}$$

选取 ε, η 适当小, 使得

$$1 - \lambda - C\varepsilon\eta^{-1} > 0 \quad \lambda(p-1) - \lambda(k-2) - C\eta H^{-\lambda}(0)(p+1) > 0$$

故存在常数 $C_1 > 0$, 使

$$G'(t) \geq C_1 (\|u_t\|_2^2 + H(t) + \|u\|_{p+1}^{p+1}) \quad t \geq 0 \quad (15)$$

由于 $H(0) > 0$ 和 $g'(0)$ 有界, 故又取 ε 适当小, 使得 $\alpha(0) = H^{-\lambda}(0) + \varepsilon g'(0) > 0$. 这样式(15)表明 $\alpha(t)$ 是递增函数, 即 $\alpha(t) \geq \alpha(0) > 0, t \geq 0$.

证明存在常数 $C_2 > 0$, 使下式成立

$$G'(t) \geq C_2 (H^{1-\lambda}(t) + \varepsilon g'(t))^s \quad s = (1 - \lambda)^{-1} > 1 \quad (16)$$

由 Cauchy 和 Young 不等式得

$$|g'(t)|^s = 2^s \left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^s \leq 2^s \|u\|_2^s \|u_t\|_2^s \leq C \left(\|u\|_{p+1}^{2\lambda(1-2\lambda)} + \|u_t\|_2^2 \right)$$

注意到对 $\forall y \geq 0, a > 0$ 和 $0 \leq \sigma \leq 1$, 存在不等式 $y^\sigma \leq y + 1 \leq (1 + a^{-1})(y + a)$,

$$\text{令} \quad y = \|u\|_{p+1}^{p+1} \quad \sigma = 2\lambda(p+1)(1-2\lambda) \leq 1 \quad a = H(0)$$

$$\text{得到} \quad \|u\|_{p+1}^{2\lambda(1-2\lambda)} \leq (1 + H^{-\lambda}(0))(\|u\|_{p+1}^{p+1} + H(0)) \leq \alpha \|u\|_{p+1}^{p+1} + H(t)$$

$$\text{所以} \quad |g'(t)|^s \leq \alpha \|u\|_{p+1}^{p+1} + H(t) + \|u_t\|_2^2$$

结合式(4)得

$$(H^{1-\lambda}(t) + \varepsilon g'(t))^s \leq \alpha \|u\|_{p+1}^{p+1} + H(t) + \|u_t\|_2^2 \quad (17)$$

因此综合式(15)及(17)推出式(16). 由式(16)可得 $\alpha(t)$ 必在有限时间内爆破, 即存在 $T < \infty$, 使

$$\lim_{t \rightarrow T} (H^{1-\lambda}(t) + \varepsilon g'(t)) = \infty \quad (18)$$

现断言
$$\limsup_{t \rightarrow T} \|u(t)\|_{p+1} = \infty \tag{19}$$

如若不然,即 $\limsup_{t \rightarrow T} \|u(t)\|_{p+1} < \infty$. 由式 (4) (18) 得

$$\limsup_{t \rightarrow T} H(t) < \infty \qquad \limsup_{t \rightarrow T} g'(t) = \infty \tag{20}$$

由于 $|g'(t)| \leq \|u\|_2 \|u_t\|_2 \leq C \|u\|_{p+1} \|u_t\|_2$

因此
$$\limsup_{t \rightarrow T} \|u_t\|_2 = \infty \tag{21}$$

由式 (7) 得 $\limsup_{t \rightarrow T} E(t) < \infty$, 又由式 (2) 得 $\limsup_{t \rightarrow T} \|u_t\|_2 < \infty$. 与式 (21) 矛盾, 所以式 (19) 成立. 证毕.

4 定理 2 的证明

在证明定理 2 之前, 先给出两个引理.

对 $\forall \phi \in W_0^{1,k}(\Omega)$ 定义

$$J(\phi) = \frac{1}{k} \|\nabla \phi\|_k^k - \frac{1}{p+1} \|\phi\|_{p+1}^{p+1} \tag{22}$$

$$K(\phi) = \|\nabla \phi\|_k^k - \|\phi\|_{p+1}^{p+1} \tag{23}$$

由式 (2) 易知
$$E(t) = \frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2 + J(u(t)) \tag{24}$$

同文献 [6] 中引理 2.1 的证明方法类似, 可以证明:

引理 1 设 $p > k - 1$, 定义

$$d = \inf_{\lambda \in R} \{\sup_{\lambda \in R} J(\lambda \phi) \mid \phi \in W_0^{1,k}(\Omega) \setminus \{0\}\} \tag{25}$$

则 $d > 0$.

同文献 [6] 中引理 2.2 和 2.3 的证明方法类似, 可证明:

引理 2 设 $u(t)$ 是问题 (1) 在 $[0, T_{\max})$ 上的解, 记

$$W = \{\phi \in W_0^{1,k}(\Omega) \mid K(\phi) < 0, J(\phi) < d\} \tag{26}$$

这里 d 是引理 1 中的正数, 那么若 $u_0 \in W$ 和 $E(0) < d$, 对 $\forall t \in [0, T_{\max})$ 则

$$u(t) \in W \qquad \|\nabla u\|_k^k > \frac{kK(p+1)}{p+1-k} \qquad t \in [0, T_{\max}) \tag{27}$$

定理 2 的证明: 设问题 (1) 存在整体解 $u(t), t \geq 0$. 由式 (3) 得

$$\int_0^t (\|u(s)\|_{m+1}^{m+1} + \|\nabla u_t\|_2^2) ds = E(0) - E(t) \leq d \tag{28}$$

这蕴含了
$$\int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds \leq Ct^{(m-1)(m+1)} \tag{29}$$

下面证明 $g(t) = \|u(t)\|_2^2$ 必在有限时间内爆破.

注意到式 (11) 可写成

$$\frac{1}{2} g''(t) = \|u_t\|_2^2 - K(u(t)) - \int_{\Omega} (uu_t|u_t|^{m-1} + \nabla u \nabla u_t) dx \tag{30}$$

同定理 1 中的证明类似, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$\left| \int_{\Omega} uu_t|u_t|^{m-1} dx \right| + \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right| \leq \varepsilon (\|u\|_{p+1}^{p+1} + C_{\varepsilon} (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|\nabla u_t\|_2^2))$$

所以
$$\frac{1}{2} g''(t) + C_{\varepsilon} (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|\nabla u_t\|_2^2) \geq \|u_t\|_2^2 - K(u) - \varepsilon \|u\|_{p+1}^{p+1} \tag{31}$$

设 $\sigma > k$ 为待定常数, 那么由式 (27) (28) 得

$$\begin{aligned} & -K(u) - \varepsilon \|u\|_{p+1}^{p+1} \geq -K(u) + \sigma(E(t) - E(0)) - \varepsilon \|u\|_{p+1}^{p+1} = \\ & \left(\frac{\sigma}{k} - 1\right) \|\nabla u\|_k^k + \frac{\sigma}{2} \|u_t\|_2^2 + \left(1 - \varepsilon - \frac{\sigma}{p+1}\right) \|u\|_{p+1}^{p+1} - \sigma E(0) \geq \\ & \frac{\sigma - k}{k} \frac{kK(p+1)}{p+1-k} - \sigma E(0) + \frac{\sigma}{2} \|u_t\|_2^2 + \sigma_0 \|u\|_{p+1}^{p+1} \end{aligned} \tag{32}$$

这里选取正数 ε, σ 满足 $\sigma_0 = 1 - \varepsilon - \sigma/(p+1) > 0$ 和

$$\frac{\sigma - k}{k} \frac{kd(p+1)}{p+1-k} - \sigma E(0) > 0 \quad \text{即} \quad E(0) < \frac{d(\sigma - k)(p+1)}{d(p+1-k)} < \frac{d(p+1)}{p+1-k}$$

从式(31)(32)得

$$1/2 g''(t) + C_\varepsilon (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|\nabla u_t\|_2^2) \geq (1 + \sigma/2) \|u_t\|_2^2 + \sigma_0 \|u\|_{p+1}^{p+1} + \sigma_1 \quad (33)$$

其中

$$\sigma_1 = d(\sigma - k)(p+1)(p+1-k) - \sigma E(0) > 0$$

利用式(33)(26)(27)和(23)得

$$1/2 g''(t) + C_\varepsilon (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|\nabla u_t\|_2^2) \geq \sigma_0 \|u\|_{p+1}^{p+1} \geq \sigma_0 \|\nabla u\|_k^k \geq \sigma_0 \frac{kd(p+1)}{p+1-k} \quad (34)$$

对式(34)关于 t 在 $(0, t)$ 上积分两次, 考虑到式(28), 得

$$g(t) \geq \sigma_0 \frac{kd(p+1)}{p+1-k} t^2 + (-C_\varepsilon d + g'(0))t + g(0)$$

故有 $\sigma_2 > 0$, 当 $t \geq 0$ 时, $g(t) = \|u(t)\|_2^2 \geq \sigma_2^2 t^2$, 即 $\|u(t)\|_2 \geq \sigma_2 t$. 进而 $1/2 g''(t) + C_\varepsilon (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|\nabla u_t\|_2^2) \geq \sigma_0 \|u\|_{p+1}^{p+1} \geq \sigma_0 \|u\|_2^2 \geq Ct^2$. 利用类似方法, 有 $\sigma_3 > 0$ 得 $g(t) = \|u(t)\|_2^2 \geq \sigma_3^2 t^4$, 即

$$\|u(t)\|_2 \geq \sigma_3 t^2 \quad t \geq 0 \quad (35)$$

但是, 当 $t > 0$ 时, 运用 Cauchy 不等式和式(29), 有估计

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2 + \int_0^t \|u_t(s)\|_2 ds \leq \|u_0\|_2 + t^{1/2} \left(\int_0^t \|u_t(s)\|_2^2 ds \right)^{1/2} \leq \|u_0\|_2 + Ct^{m/(m+1)}$$

这同式(35)矛盾. 证毕.

参考文献:

- [1] BIAZUTTI A C. On a nonlinear evolution equation and its applications[J]. Nonlinear Anal, 1995, 24: 1221—1234.
- [2] DANG D A, PHAM N D. Strong solutions of a quasilinear wave equation with nonlinear damping[J]. SIAM J Math Anal, 1988, 19: 337—347.
- [3] YAMADA Y. Quasilinear wave equations and related nonlinear evolution equation[J]. Nagoya Math J, 1981, 84: 31—83.
- [4] ZUAZUA E. Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems[J]. Asymptotic Anal, 1988, (1): 161—185.
- [5] MA T F, SORIANO J A. On weak solutions for an evolution equation with exponential nonlinearities[J]. Nonlinear Anal, 1999, 37: 1029—1038.
- [6] TODOROVA G. Stable and unstable sets for the Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms[J]. J Math Anal, 1999, 239: 213—226.
- [7] SEGAL I. Nonlinear semigroups[J]. Anal Math, 1963, 78: 339—364.
- [8] TODOROVA G. Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and sources terms[J]. Nonlinear Anal, 2000, 41: 891—905.

Blow up of solutions to wave equation with nonlinear damping and source terms

YUAN Qing, CHEN Cai-sheng

(College of Sciences, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: By use of two different methods, the non-existence of the global solution to the initial boundary problem of the nonlinear wave equation with damping and source terms is studied with the energy function. It is verified that, when the initial energy $E(0) < d$ (d is a positive value) holds, the solution to the problem is bound to blow up in finite time.

Key words: non-linear wave equation; energy function; existence of global solution; blow up