

二维浅水水流的一种新型三角形网格 FVM 计算格式

褚克坚 ,华祖林 ,王惠民

(河海大学环境科学与工程学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :将三角形网格良好的边界拟合性能与有限体积法守恒性质好、求解速度快的优点相结合 ,构造了适用于三角形网格的有限体积计算模式 ,模式以交替方向隐式(ADI)求解 .采用长江三峡工程河段水流资料对模型进行验证计算 ,将实测值与计算值作了对比 ,结果令人满意 .
关键词 :三角形网格 ;水流 ;有限体积法 ;ADI ;数值模拟
中图分类号 :X143 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2003)04-0370-04

近 20 年来 ,以三角形网格布设技术为基础的有限差分法(FDM)和有限体积法(FVM)的计算模式得到较快的发展 .对于 FDM 格式 ,如 Sebastian W Bauer^[1]、赵士清^[2]、窦希萍^[3]、华祖林^[4]等 ,这类模型吸取了有限元法在网格布置上的长处 ,同时保持了差分法易于求解、计算工作量小的优势 .但三角形 FDM 格式由于难以保持基本方程的守恒性质 ,计算中会出现水量、动量不平衡等问题 .Lars Davidsson^[5]以及 K Anastasiou^[6]、谭维炎^[7]、赵棣华^[8]等提出了三角形 FVM 格式 .该格式物理意义明确 ,离散方程显示出准确的积分守恒 ,但计算方法以显式居多 ,稳定性与时间步长等都受到较大限制 .
本文对计算区域采用三角形网格布置 ,构造三角形网格交替方向隐式的有限体积格式 ,经长江三峡工程河段的数值模拟 ,取得良好的效果 .

1 基本方程

1.1 方程式

对开阔宽浅型水域的水流运动 ,可以守恒型二维非恒定浅水方程描述 :

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y} = \boldsymbol{B}$$

其中 $\boldsymbol{Q} = (\xi , hu , hv)^T$ $\boldsymbol{F} = \left(hu , hu u + \frac{1}{2} gh h - \nu h \frac{\partial u}{\partial x} , hu v - \nu h \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T$
 $\boldsymbol{G} = \left(hv , hu v - \nu h \frac{\partial u}{\partial y} , hv v + \frac{1}{2} gh h - \nu h \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T$
 $\boldsymbol{B} = \left(0 , fhv - gh \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\tau_{sx} - \tau_{bx}}{\rho} , - fhu - gh \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\tau_{sy} - \tau_{by}}{\rho} \right)^T$

式中 : x , y ——空间坐标 ; t ——时间坐标 ; u , v ——在 x , y 方向沿水深积分平均流速分量 ; ξ ——潮位 ; h ——水深 ; f ——柯氏力系数 ; ρ ——水的密度 ; Z ——地形高程 ; ν —— x , y 方向沿水深平均的紊动粘性系数 ; τ_{sx} , τ_{sy} ——沿 x , y 方向的风应力 ; τ_{bx} , τ_{by} ——沿 x , y 方向的河床底应力 .

1.2 边界条件

a. 闭边界(岸边界) Γ_b :采用流动法向通量为零与可滑移条件 ,即

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} |_{\Gamma_b} = 0$$

b. 开边界(水流边界) Γ_0 :一般在河道较顺直段选取 ,有

$$\xi (x , y , t) |_{\Gamma_0} = \xi (t)$$

或

$$u(x,y,t)|_{\Gamma_0} = u_l(t) \quad u(x,y,t)|_{\Gamma_0} = v_l(t)$$

2 模型的建立

2.1 物理量的布置方式

对计算区域中的任意一个三角形单元,各水力变量 $P(x,y)$ 的计算值均布置在节点上,并假定单元内变量分布呈一阶近似:

$$P(x,y) = a + bx + cy$$

2.2 基本方程的离散及求解

鉴于有限体积法(FVM)物理概念清晰,能严格保证因变量的积分守恒,本文将 FVM 与三角形网格相结合,对基本方程在控制体积(图 1)上积分:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - B \right) dx dy + \oint_{\Gamma_{\Omega}} (F dy - G dx) = 0$$

由于引入一阶近似假定,单元内各水力变量 ξ, h, u, v 均可表示为节点处变量值的线性函数,从而可直接求解积分方程.离散结果表示为如下形式:

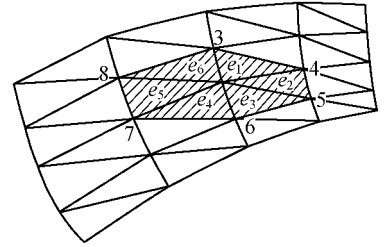


图 1 控制体积

Fig.1 Control volume

$$\frac{6}{\Delta t} \sum S \xi_j^1 + \sum_{j=3}^8 \alpha_j h_j^1 = b_1$$

$$\left[\left(\frac{h_i}{\Delta t} + g \frac{\sqrt{u_i^2 + v_i^2}}{C_i^2} \right) \sum S - \nu \sum_{j=3}^8 \beta_j \right]^0 u_i^1 + \sum_{j=3}^8 (\alpha_{u_j} - \nu \gamma_j) u_j^1 = b_2$$

$$\left[\left(\frac{h_i}{\Delta t} + g \frac{\sqrt{u_i^2 + v_i^2}}{C_i^2} \right) \sum S - \nu \sum_{j=3}^8 \beta_j \right]^0 v_i^1 + \sum_{j=3}^8 (\alpha_{v_j} - \nu \gamma_j) v_j^1 = b_3$$

式中

$$\begin{aligned} \sum_{j=3}^8 \alpha_{u_j} u_j^1 &= \sum_{j=3}^8 \left\{ \left[(y_{j-1} - y_j) \left(\frac{1}{12} u_j h_{j-1} + \frac{1}{4} u_j h_j \right) - (x_{j-1} - x_j) \left(\frac{1}{12} v_j h_{j-1} + \frac{1}{12} v_{j-1} h_{j-1} + \frac{1}{12} v_{j-1} h_j + \frac{1}{4} v_j h_j \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. (y_j - y_{j+1}) \left(\frac{1}{12} u_j h_{j+1} + \frac{1}{4} u_j h_j \right) - (x_j - x_{j+1}) \left(\frac{1}{12} v_j h_j + \frac{1}{12} v_{j+1} h_j + \frac{1}{12} v_j h_{j+1} + \frac{1}{4} v_{j+1} h_{j+1} \right) \right]^0 u_j^1 + \\ &\quad \left. (y_{j-1} - y_j) \left(\frac{1}{6} u_{j-1} h_{j-1} + \frac{1}{6} u_{j-1} h_j \right)^0 u_j^1 \right\} - \\ &\quad (y_4 - y_5) \left(\frac{1}{6} u_4 h_4 + \frac{1}{6} u_4 h_5 \right)^0 u_5^1 - (y_7 - y_8) \left(\frac{1}{6} u_7 h_7 + \frac{1}{6} u_7 h_8 \right)^0 u_8^1 + \\ &\quad (y_4 - y_5) \left(\frac{1}{6} u_5 h_4 + \frac{1}{6} u_5 h_5 \right)^0 u_4^1 + (y_7 - y_8) \left(\frac{1}{6} u_8 h_7 + \frac{1}{6} u_8 h_8 \right)^0 u_7^1 \\ \sum_{j=3}^8 \alpha_{v_j} v_j^1 &= \sum_{j=3}^8 \left\{ \left[(y_{j-1} - y_j) \left(\frac{1}{12} u_{j-1} h_{j-1} + \frac{1}{12} u_j h_{j-1} + \frac{1}{12} u_{j-1} h_j + \frac{1}{4} u_j h_j \right) - (x_{j-1} - x_j) \left(\frac{1}{12} v_j h_{j-1} + \frac{1}{4} v_j h_j \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. (y_j - y_{j+1}) \left(\frac{1}{12} u_j h_{j+1} + \frac{1}{12} u_{j+1} h_j + \frac{1}{12} u_{j+1} h_{j+1} + \frac{1}{4} u_j h_j \right) - (x_j - x_{j+1}) \left(\frac{1}{12} v_j h_{j+1} + \frac{1}{4} v_j h_j \right) \right]^0 v_j^1 - \\ &\quad \left. (x_j - x_{j+1}) \left(\frac{1}{6} v_{j+1} h_j + \frac{1}{6} v_{j+1} h_{j+1} \right)^0 v_j^1 \right\} + \\ &\quad (x_5 - x_6) \left(\frac{1}{6} v_6 h_5 + \frac{1}{6} v_6 h_6 \right)^0 v_5^1 + (x_8 - x_3) \left(\frac{1}{6} v_3 h_8 + \frac{1}{6} v_3 h_3 \right)^0 v_8^1 - \\ &\quad (x_8 - x_3) \left(\frac{1}{6} v_8 h_8 + \frac{1}{6} v_8 h_3 \right)^0 v_3^1 - (x_5 - x_6) \left(\frac{1}{6} v_5 h_5 + \frac{1}{6} v_5 h_6 \right)^0 v_6^1 \\ \alpha_j &= [2u(y_{j-1} - y_{j+1}) + u_j(y_{j-1} - y_j) + u_{j+1}(y_j - y_{j+1})] \mathcal{P} - \\ &\quad [2v(x_{j-1} - x_{j+1}) + v_j(x_{j-1} - x_j) + v_{j+1}(x_j - x_{j+1})] \mathcal{P} \\ \beta_j &= \frac{-(h_j + h_{j+1}) \mathcal{P}}{4S_{j-2}} [(y_{j+1} - y_j) \mathcal{P} + (x_{j+1} - x_j) \mathcal{P}] \\ \gamma_j &= \frac{(h_{j-1} + h_j) \mathcal{P}}{4S_{j-3}} [(y_{j-1} - y_i) \mathcal{P} + (x_{j-1} - x_i) \mathcal{P}] + \end{aligned}$$

$$\frac{(h_{j+1} + h_j)}{4S_{j-2}} [(y_i - y_{j+1})(y_j - y_{j+1}) + (x_i - x_{j+1})(x_j - x_{j+1})]$$
$$b_1 = \frac{6}{\Delta t} \sum S \xi_i^0 \quad b_2 = \frac{1}{\Delta t} \sum S hu_i - \frac{g}{3} \sum_{j=3}^8 \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) e_{j-2} S_{j-2} (h_i + h_j + h_{j+1}) \right]^0$$
$$b_3 = \frac{1}{\Delta t} \sum S hv_i - \frac{g}{3} \sum_{j=3}^8 \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) e_{j-2} S_{j-2} (h_i + h_j + h_{j+1}) \right]^0$$

式中 $[*]$ ——已知变量 $[*]$ ——待求变量 Δt ——时间步长; $\sum S$ ——控制体面积; e_j ——第 j 个三角形单元; S_j ——第 j 个三角形单元面积. 需要说明的是, 当 j 为控制体节点 3 时, $j-1$ 是指节点 8, e_{j-3} 为第 6 单元, S_{j-3} 为第 6 单元面积; j 为节点 8 时, $j+1$ 则指节点 3.

对于离散后得到的七对角阵方程组, 模型采用 ADI 逐行迭代法, 在不同方向交替进行一维隐式求解. 以图 1 所示网格为例, 在 i 点的离散方程中, 先取其邻点 7 和 4 节点变量为未知量, 其他邻点变量认为已知, 并以最新值代入, 逐行扫描求解, 直至全场完毕, 完成第 1 时步计算. 然后, 换一方向, 取邻点 6 和 3 节点变量为未知量, 其他邻点的变量为已知, 同样以最新值代入, 逐行推进至全场, 完成第 2 时步计算. 方程组中偏导数的求解详见文献 [4].

3 实例计算

长江三峡太平溪至黄陵庙水文站河段属于长江三峡工程干流段, 岸边迂回曲折, 水下地形复杂. 研究计算区域长约 18 km, 三角形网格布置见图 2, 网格数共计 5 346 个, 三角形单元面积变化范围为 110.98 ~ 5 506.84 m². 模型采用施工期一期围堰 1996 ~ 1997 年丰水期(流量 21 300 m³/s)、平水期(流量 13 800 m³/s)茅坪溪断面上游 50 m 以及下游 50 m、100 m、200 m、500 m 共 5 个断面, 分别距岸边 30 m、100 m 共 10 个测点的实测资料为依据进行验证. 对比结果见表 1. 从表 1 看出各测点计算值与实测值总体差异不大, 吻合良好. 相应的流场分布见图 3、图 4, 主流基本沿深槽方向运动, 一期围堰后有局部回流区存在, 与实际情况相符.

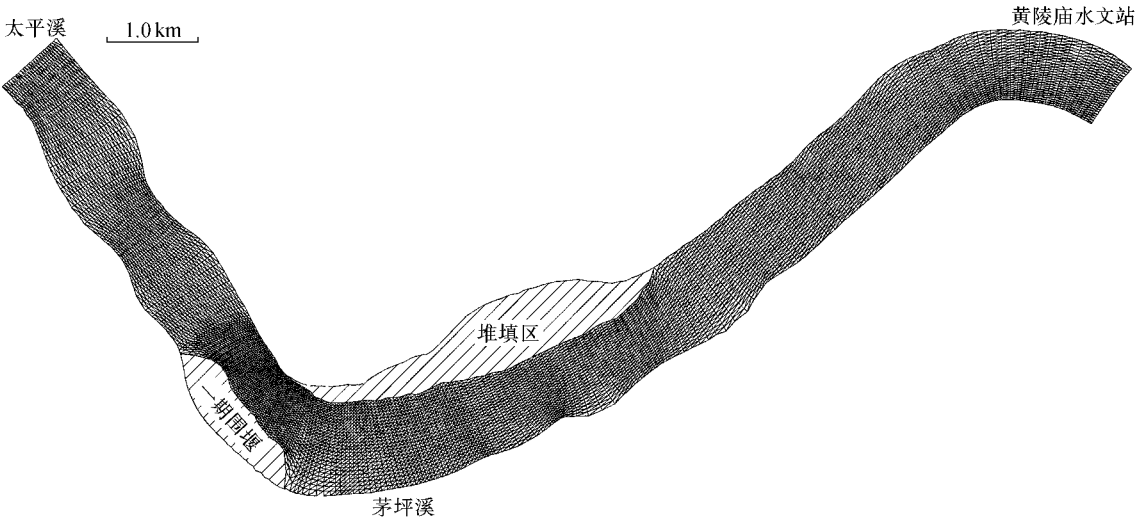


图2 计算网格示意图

Fig.2 Triangular meshes

表1 流速实测值与计算值对比

Table 1 Comparison of calculated velocity with observed data

测点号	丰水期		平水期		测点号	丰水期		平水期	
	实测值	计算值	实测值	计算值		实测值	计算值	实测值	计算值
上游 I-1	0.290	0.30	0.290	0.29	下游 II-2	0.320	0.58	0.270	0.50
上游 I-2	0.650	0.59	0.400	0.42	下游 III-1	0.160	0.49	0.255	0.28
下游 I-1	0.135	0.36	0.155	0.27	下游 III-2	0.710	0.77	0.643	0.55
下游 I-2	0.460	0.58	0.480	0.56	下游 IV-1	0.480	0.48	0.425	0.25
下游 II-1	0.185	0.33	0.180	0.28	下游 IV-2	0.690	0.69	0.687	0.49

注: 1——距岸边 30 m; 2——距岸边 100 m.

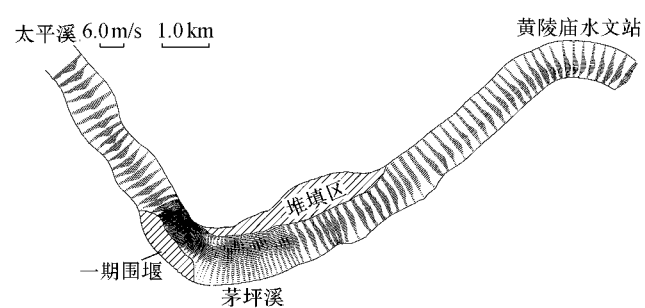


图 3 1996 年丰水期 8 月 22 日流场示意图

Fig.3 Flow field for Aug.22 ,1996 during high water period

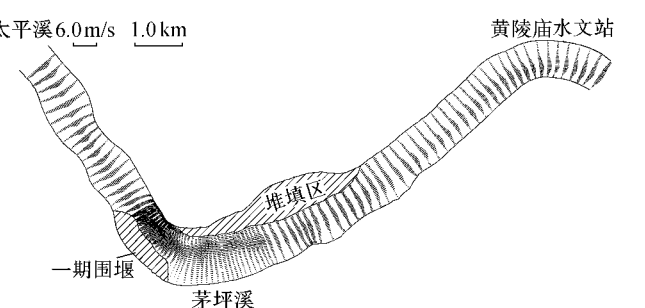


图 4 1996 年平水期 10 月 16 日流场示意图

Fig.4 Flow field for Oct.16 ,1996 during mean water period

4 结 论

- a. 交替方向隐式的三角形网格有限体积格式具有良好的贴合天然河道边界的特性 ,该格式基于积分守恒率建立 ,即使在相对较粗网格情况下也显示出较为准确的守恒性质 ;基本方程离散以一阶近似原则为基础 ,方程各项的积分可由布置于网格节点上的水力变量值直接求得 ;模型采用 ADI 逐行迭代法进行求解 ,计算工作量小 ,稳定性好 ,收敛速度快.
- b. 将模型应用于长江三峡工程河段水流的数值模拟 ,验证表明计算值与实测值吻合良好 ,是对天然河道复杂边界条件水流计算模式的一次有益尝试.

参考文献 :

[1] SEBASTIAN W Bauer ,KLAUS D Schmidt. Irregular-grid finite-difference simulation of lake geneva surge[J]. Journal of Hydraulic Engineering ,1983 ,109(10) :1285—1296.

[2] 赵士清 ,张镜潮.一种简便的二维潮流数学模型[J]. 水利水运科学研究 ,1983(2) :15—23.

[3] 窦希萍 ,李 来.三角形网格生成法在海洋工程潮流数学模型中的应用[J]. 水利水运科学研究 ,1993(3) :65—69.

[4] 华祖林 ,褚克坚.基于三角形网格的潮汐水域水流水质的一种计算模式[J]. 河海大学学报(自然科学版) ,2001 ,29(4) :31—37.

[5] LARS Davidson. A pressure correction method for unstructured meshes with arbitrary control volumes[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids ,1996 ,22 :265—281.

[6] ANASTASIOU K ,CHAN C T. Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids ,1997 ,24 :1225—1245.

[7] 谭维炎 ,胡四一.二维浅水明流的一种二阶高性能算法[J]. 水科学进展 ,1992 ,3(2) :89—95.

[8] 赵棣华 ,戚晨 ,庾维德 ,等.平面二维水流-水质有限体积法及黎曼近似解模型[J]. 水科学进展 ,2000 ,11(4) :368—374.

A new triangular-grid FVM algorithm for 2-D shallow water flow

CHU Ke-jian , HUA Zu-lin , WANG Hui-min

(College of Environmental Science and Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China)

Abstract A triangular-grid finite volume algorithm and its alternating directional implici(ADI) solution are developed by combination of the neat representation of the natural boundary by triangular meshes with the advantages of fine conservation and fast numerical solution of the finite volume method. The present model is used for simulation of the flow field of the Three Gorges of the Yangtze River. Compared with the measured data , the calculated results are satisfactory.

Key words triangular-grid ; water flow ; finite volume method ; ADI ; numerical simulation