

钢框架实际作用与其等效节点荷载的比较分析

夏逸鸣 吴胜兴 曲卓杰

(河海大学土木工程学院 江苏 南京 210098)

摘要 :考虑钢框架受到分布和集中荷载的作用以及梁柱剪切变形的影响 ,从割线刚度方程出发 ,导出梁柱单元的切线刚度方程 .通过简便的数值方法 ,实现对钢框架结构的二阶弹性计算 .对所得结果分析表明 ,实际作用荷载与其等效节点荷载有一定差别 .

关键词 钢结构 ;荷载 ;刚度 ;二阶分析

中图分类号 :TU391 文献标识码 :A 文章编号 :1000-198X(2003)04-0432-04

在钢框架结构中 ,像风、雪、结构自重等沿柱、梁长度分布作用的荷载是普遍存在的 .目前 ,在进行钢框架结构的设计及研究中 ,一般都将分布荷载等效为节点荷载 ,这种处理方法与实际情况有出入 ,其所得结果必然存在一定的误差 ,这是因为 ,在二阶分析中 ,等效节点力与分布作用力所引起的结构内力是非线性的 ,是不可叠加的 .文献 [1] 利用点平衡单元对此进行过讨论 ,但该文存在当轴力 P 为零时 ,单元在均荷载或集中荷载杆端弯矩系数为零的明显谬误 .本文通过建立考虑有横向荷载作用的梁柱单元的位移场 ,分别导出梁柱单元的割线和切线刚度方程 ,并在此基础上 ,对沿柱、梁长度方向有横向荷载作用的钢框架结构进行二阶分析 .经过所得结果与等效节点荷载分析方法的比较 ,可以看出两者间的差别 .

1 基本假定

本文理论基于以下假定 (a)单元为等截面和弹性的 ,横截面为双轴对称 ,其变形后仍保持平面 (b)不考虑局部屈曲、侧向扭转屈曲影响 (c)不考虑由横向荷载引起的杆件单元的轴向变形 (d)小应变 ,大位移 ; (e)所有外载都是保守力 .

2 梁柱单元的割线刚度矩阵方程

由考虑剪切变形的梁柱理论^[2] ,可得有横向荷载作用的梁柱单元的割线刚度方程

$$M_1 = \frac{EI}{L} (C_1 \theta_1 + C_2 \theta_2 + C_w \theta_0) \tag{1}$$

$$M_2 = \frac{EI}{L} (C_2 \theta_1 + C_1 \theta_2 + C_v \theta_0) \tag{2}$$

$$P = EA \left(\frac{e}{L} + C_b \right) \tag{3}$$

式中 : E ——单元材料的弹性模量 ; I ——惯性矩 ; A , L ——单元截面面积和长度 ; e ——单元轴向伸缩量 .

$$\begin{aligned} P \geq 0 \quad C_1 &= \frac{\varphi \sin \varphi - a \varphi^2 \cos \varphi}{2(1 - \cos \varphi) - a \varphi \sin \varphi} & C_2 &= \frac{a \varphi^2 - \varphi \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi) - a \varphi \sin \varphi} \\ P \leq 0 \quad C_1 &= \frac{\varphi \sinh \varphi - a \varphi^2 \cosh \varphi}{2 \cosh \varphi - 1 - a \varphi \sinh \varphi} & C_2 &= \frac{a \varphi^2 - \varphi \cosh \varphi}{2 \cosh \varphi - 1 - a \varphi \sinh \varphi} \end{aligned}$$

当单元有均布荷载 q 时 :

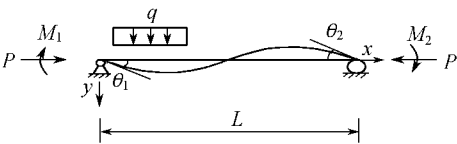


图 1 单元中基本的力和位移
Fig.1 Elementary forces and displacements

$P > 0$

$$C_w = - C_v = - \left[\frac{1 - \frac{1}{2}(C_1 - C_2)}{a\varphi^2} \right]$$

$P < 0$

$$C_w = - C_v = \left[\frac{1 - \frac{1}{2}(C_1 - C_2)}{a\varphi^2} \right]$$

$P = 0$

$$C_w = - C_v = 1/12$$

$$\theta_0 = \frac{qL^3}{EI}$$

当单元有中央集中荷载 Q 时：

$P > 0$

$$C_w = - C_v = - \left[\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\varphi} - \frac{1}{2} \right] \frac{(C_1 - C_2)}{a\varphi^2}$$

$P < 0$

$$C_w = - C_v = \left[\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\varphi} - \frac{1}{2} \right] \frac{(C_1 - C_2)}{a\varphi^2}$$

$P = 0$

$$C_w = - C_v = 1/8$$

$$\theta_0 = \frac{QL^2}{EI}$$

由基本假定“不考虑横向荷载引起的杆件单元的轴向变形”及比照文献 [3],可推导出式 (3) 中 C_b 的表达式

$$C_b = b_1(\theta_1 + \theta_2) + b_2(\theta_1 - \theta_2)$$

经过推导,可得出

$$b_1 = \frac{(C_1^0 + C_2^0)(C_2^0 - 2)(C_1 + C_2)}{8\pi^2 q (C_1^0 + C_2^0)}$$

$$b_2 = \frac{C_2^0 (C_1 - C_2)}{8(C_1^0 + C_2^0)(C_1^0 - C_2^0)}$$

$P \geqslant 0$

$$C_1^0 = \frac{\varphi \sin \varphi - \varphi^2 \cos \varphi}{2(1 - \cos \varphi) - \varphi \sin \varphi}$$

$$C_2^0 = \frac{\varphi^2 - \varphi \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi) - \varphi \sin \varphi}$$

$P \leqslant 0$

$$C_1^0 = \frac{\varphi \sinh \varphi - \varphi^2 \cosh \varphi}{2 \cosh \varphi - 1 - \varphi \sinh \varphi}$$

$$C_2^0 = \frac{\varphi^2 - \varphi \sinh \varphi}{2 \cosh \varphi - 1 - \varphi \sinh \varphi}$$

$$q = \frac{P}{P_E}$$

$$P_E = \frac{\pi^2 EI a}{L^2}$$

$$\varphi = \pi \sqrt{q}$$

$$a = 1 - \frac{kP}{GA}$$

式中： k ——剪切系数； G ——剪切模量。受压力时， P 为正；受拉力时， P 为负。

显然，当不考虑剪切变形，即 $a = 1$ 时，上述公式与无剪切变形的公式是一致的。

3 梁柱单元的切线刚度矩阵方程

单元切线刚度可由割线刚度方程 (1) (2) (3) 求得，即

$$\gamma_{ij} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j} + \frac{\partial f_i}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial u_j} \right] \tag{4}$$

$$\boldsymbol{f} = [M_1 \quad M_2 \quad P]$$

$$\boldsymbol{u} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad e]$$

为了从式 (4) 中求出单元的切线刚度矩阵，首先确定关系式：

$$\frac{\partial q}{\partial \theta_1} = \frac{W_1}{H}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \theta_2} = \frac{W_2}{H}$$

$$\frac{\partial q}{\partial e} = \frac{1}{LH}$$

$$V_1 = C_1' \theta_1 + C_2' \theta_2 + C_w' \theta_0$$

$$V_2 = C_2' \theta_1 + C_1' \theta_2 + C_v' \theta_0$$

$$W_1 = 2(b_1 + b_2)\theta_1 + 2(b_1 - b_2)\theta_2$$

$$W_2 = 2(b_1 - b_2)\theta_1 + 2(b_1 + b_2)\theta_2$$

$$H = \frac{\pi^2 a^2}{\lambda^2} - [b_1'(\theta_1 + \theta_2) + b_2'(\theta_1 - \theta_2)]$$

长细比

$$\lambda = \sqrt{\frac{AL^2}{I}}$$

至此，可得到单元的切线刚度矩阵

$$k_e = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} C_1 + \frac{V_1 W_1}{H} & C_2 + \frac{V_1 W_2}{H} & \frac{\pi^2 a^2 W_1}{LH} \\ C_2 + \frac{V_1 W_2}{H} & C_1 + \frac{V_2 W_2}{H} & \frac{\pi^2 a^2 W_2}{LH} \\ \frac{\pi^2 a^2 W_1}{LH} & \frac{\pi^2 a^2 W_2}{LH} & \frac{\pi^2 a^2}{L^2 H} \end{bmatrix} \tag{9}$$

由于 C_1, C_2 的导函数在 φ 为零附近的求解非常困难,故求得 C_1, C_2 的导函数就成为解决问题的难点和关键.本文采用差分商取代 C_1, C_2 的导数,只要差分段足够精细,差分商具有极高的精度.为了实现具体问题的计算,首先求出数个点上的差分商,然后以多项式分段来拟合差分商曲线,以此代替 C_1, C_2 的导函数.在 φ 的实用范围内,只要有适量的差分拟合点,则多项式分段拟合曲线就具有极高的精度. C_w, C_v, b_1, b_2 的导数也作同样处理.

单元的切线刚度方程可写为 $\Delta f = k_e \Delta u$

4 结构的整体切线刚度矩阵方程

最后,整个结构的切线刚度矩阵方程可集成为:

$$\Delta F = K_T \Delta U$$

其中 $K_T = \sum_{i=1}^{Nelem} L^T (T^T k_e T + N) L$

式中: L ——坐标转换矩阵; N ——考虑结点大位移的几何刚度矩阵; T ——杆端力转换矩阵.其具体表达式见文献[4].

5 数值算例

一个单层钢框架,作用有均布荷载(见图2.3)和中央集中荷载(见图4.5),采用控制 u 方向位移增量的牛顿-拉夫逊法求解结构的非线性方程.通过荷载-位移曲线,可以看出:随着水平荷载比例的增大即 α 的加大,无论是均布荷载、中央集中荷载即实际作用荷载,还是等效节点荷载,其结构反应曲线都呈现出逐渐下降的特性,等效节点荷载反应曲线降幅较大,实际作用荷载反应曲线降幅较小,这是由于节点荷载的变化对结构影响较大的缘故.实际作用荷载与其等效节点荷载的反应曲线,在 α 较小时,差别较大;在 α 较大时,差别较小.这是因为随着水平荷载比例的增大,竖向荷载作用,即 $P-\Delta$ 效应的影响,与水平荷载相比逐渐变小.实际作用荷载反应曲线普遍低于相应的等效节点荷载反应曲线.等效节点荷载的反应曲线在初始阶段(α 较小时)呈现出线性特点,而实际作用荷载的反应曲线从初始阶段就表现出一定的非线性特性.这是因为实际作用荷载考虑了杆件轴力对节点不平衡弯矩的影响以及荷载对结构割线、切线刚度的影响.中央集中荷载曲线低于相应的均布荷载曲线.

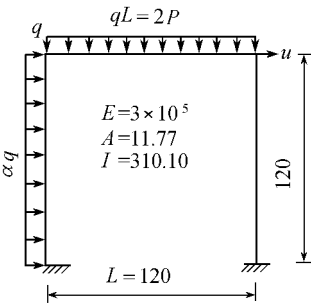


图2 均布荷载单层钢框架
Fig.2 Single story frame with
equally distributed load

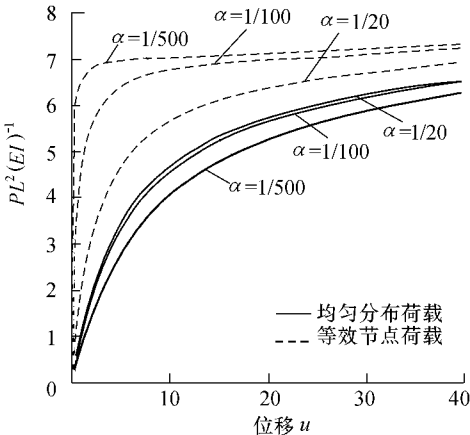


图3 位移-荷载曲线(均布荷载)
Fig.3 Displacement-loading curve(equally distributed load)

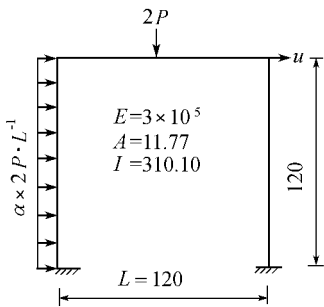


图 4 集中荷载单层钢框架

Fig.4 Single story frame with a concentrated load at the middle of span

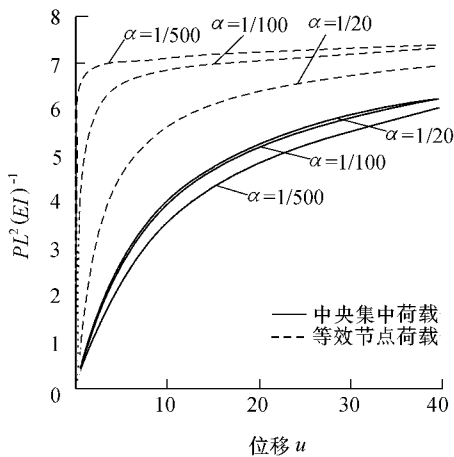


图 5 位移-荷载曲线(中央集中荷载)

Fig.5 Displacement-loading curve(concentrated load)

由算例可得出以下结论 :一般说来 ,在实际荷载与其等效节点荷载的分别作用下 ,二者的二阶分析结果差别较大 ,不可忽略 .水平侧向荷载在竖向荷载中所占比例越大 ,二者差别就越小 .

参考文献 :

[1] ZHOU Z H ,CHAN S L. Refined second-order analysis of frames with members under lateral and axial load[J]. J Struc Engrg ,ASCE , 1996 ,12(5) 548—554.

[2] 川和郎著 .结构的弹塑性稳定内力[M].王松涛 ,魏钢译 .北京 :中国建筑工业出版社 ,1992.43—82.

[3] SAAFAN S A. Nonlinear behavior of structural plane frames[J]. J Struct Div ,ASCE ,1963 ,89(4) 557—579.

[4] CHAN S L ,ZHOU Z H. Pointwise equilibrating polynomial element for nonlinear analysis of frames[J]. J Struct Engrg ,ASCE ,1994 ,120 (6) :1703—1717.

Comparative analysis of steel frames under real and equivalent nodal loads

XIA Yi-ming , WU Sheng-xing , QU Zhuo-jie
(College of Civil Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China)

Abstract : The tangent stiffness equation for the beam-column element of steel frames under distributed and concentrated loads is derived from the secant stiffness equation with consideration of the effect of shear deformation , and a simple and convenient numerical method is applied to the second-order elastic calculation of the structures. The analysis of the calculated results shows a certain difference between the real load and its equivalent nodal load.

Key words : steel structure ; load ; stiffness ; second-order analysis